Correction CT – TD 1

Analyse dimensionnelle

Méthodes, compétences et savoirs-faire

2 - Conversions

— 30°12' = 30,2 ° ≃ 0,53 rad
— 0,043 rad ≃ 2,4637 ° ≃ 2° 27' 49"

3 - Homogénéité d'une expression

1. On réalise une analyse aux dimensions :
   — $[R] = \left[\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right] = \frac{[R_1R_2]}{[R_1+R_2]} = \frac{[R]^2}{[R]} = [R]$: homogène
   — $[R] = \left[\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right] = \frac{[R_1+R_2]}{[R_1R_2]} = \frac{[R]}{[R]^2} = \frac{1}{[R]}$: non homogène
2. (a) $[x] = \mathrm{L}$, $\left[vt^2\right] = \mathrm{LT}$, $[2at] = \mathrm{LT}^{-1}$: non homogène
   (b) $[x] = \mathrm{L}$, $[v_0t] = \mathrm{L}$, $\left[\frac{at^2}{2}\right] = \mathrm{L}$: homogène
   (c) $[x] = \mathrm{L}$, $[v_0t] = \mathrm{L}$, $\left[2at^2\right] = \mathrm{L}$: homogène
3. $[x] = \mathrm{L}$ et $\left[\frac{v_0}{\tau}\cos(2\pi\frac{t}{\tau})\right] = \frac{[v_0]}{[\tau]}\left[\cos(2\pi\frac{t}{\tau})\right] = \frac{[\mathrm{LT}^{-1}]}{[\mathrm{T}]}\cdot 1 = \mathrm{LT}^{-2}$: non homogène
4. $[i]\mathrm{I}$ et $\left[i_0\exp(-\frac{t}{\tau^2})\right] = \mathrm{I}$ mais $\left[-\frac{t}{\tau^2}\right] = \mathrm{T}^{-1} \neq 1$: non homogène

4 - Dimension d'une expression

1. Si on note F la force de frottement (en intensité) et v la vitesse (en norme). L'énoncé indique $F \propto v^2$ soit
$$\boxed{F = kv^2}$$
où k est le coefficient de proportionnalité (ou coefficient de frottement ici).
Pour assurer l'homogénéité de la formule, il faut
$$[F] = [k][v]^2 \quad \text{soit} \quad \mathrm{N} = [k]\left(\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = [k]\left(\mathrm{m^2\,s^{-2}}\right)$$
Finalement
$$\boxed{[k] = \mathrm{kg\,m^{-1}}}$$
2. La loi d'Ohm donne $U = RI$ donc $[R] = [U]\cdot[I]^{-1}$. La relation courant-tension aux bornes d'un condensateur donne $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ soit $[I] = [C]\cdot[U]\cdot[T]^{-1}$.
€n combinant les deux expressions, on trouve $\boxed{[RC] = \mathrm{T}}$: le produit RC est homogène à un temps
   — dans le cadre d'un signal transitoire ; il s'agira d'un temps caractéristique du système. On posera alors $t = RC$;
   — dans le cadre d'un régime périodique, il s'agira d'une période caractéritique (ou période propre). On posera alors $T_p = RC$ ou $f_p = \frac{1}{RC}$ (fréquence propre) ou $\omega_p = \frac{2\pi}{RC}$ (pulsation propre).
3. (a) $E = mc^2$ avec m une masse et c une vitesse. On en déduit
$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{ML^2T^{-2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{[E] = \mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}$$
.
   (b) Par définition $\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ et donc
$$\boxed{\dim(\mathcal{P}) = \mathrm{ML^2T^{-3}}} \quad \text{et} \quad \boxed{[\mathcal{P}] = \mathrm{W} = \mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}}$$
   (c) L'expression de la puissance dissipée par effet Joule est $\mathcal{P} = UI$ soit $[\mathcal{P}] = [U][I]$ ce qui mène à
$$\boxed{\dim(U) = \mathrm{ML^2T^{-3}I^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{[U] = \mathrm{V} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1}}}$$

I - Théorème Π et applications

1 - Période d'un pendule

1. On cherche la période T d'un pendule simple de longueur L et de masse m, soumis à la gravité g.

   Étape 1 : Forme de la solution On suppose :

   $$T = k\,L^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}$$

   avec α, β, γ des exposants inconnus et k une constante sans dimension.

   Étape 2 : Analyse dimensionnelle On remplace par les dimensions :

   $$[T] = [L]^{\alpha}[m]^{\beta}[g]^{\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}[\mathrm{L}\ \mathrm{T}^{-2}]^{\gamma} = \mathrm{L}^{\alpha+\gamma}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{-2\gamma}$$

   On compare avec la dimension de T :

   $$T^1 = \mathrm{L}^{\alpha+\gamma}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{-2\gamma} \implies \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}$$

   Étape 3 : Résolution

   $$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0$$

   Résultat

   $$\boxed{T = k\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

   avec k constante sans dimension.
2. La masse m n'intervient pas dans l'expression de T, on en déduit que la période ne change pas si on ne modifie que la masse du pendule.
3. D'après l'expression trouvée, si L est divisé par 2 alors T est divisé par $\sqrt{2}$, indépendemment de la valeur de k. La nouvelle valeur de la période est ainsi

   $$T' = \frac{T}{\sqrt{2}} \quad \text{A.N. :} \quad T' = 6{,}0\,\mathrm{s}$$

4. On a $k = T\sqrt{\frac{g}{L}}$. A.N. : $k = 8{,}5\,\mathrm{s} \times \sqrt{\frac{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{18\,\mathrm{m}}} = 6{,}272 \approx 2\pi$. On en déduit l'epxression complète de la période :

   $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

2 - L'analyse dimensionnelle qui fit trembler l'armée américaine

1. On suppose $r = kt^{5/2}$. Les seules courbes qui soient directement identifiables sont les droites. Il faut donc obtenir une relation linéaire ($Y = AX$) ou affine ($Y = AX + B$) avec X l'abscisse et Y l'ordonnée.
   - soit on trace directement r en fonction de $t^{5/2}$: on pose $Y = r$, $X = t^{5/2}$ et on aura $Y = AX$ avec $A = k$,
   - soit on linéarise l'expression : $\ln r = \frac{5}{2}\ln t + \ln k$, on pose $Y = \ln r$, $X = \ln t$ et on aura $Y = AX + B$ avec $A = \frac{5}{2}$ et $B = \ln k$.

   Dans tous les cas, le coefficient de proportionnalité k peut être déterminé expérimentalement (pente de la droite pour la première méthode, exponentielle de l'ordonnée à l'origine pour la seconde méthode).

2. On suppose
$$r = k_0 E^\alpha \rho^\beta t^\gamma$$
avec k_0 une constante **sans dimension**. On remplace par les dimensions
$$\mathrm{L} = \left(\mathrm{ML^2T^{-2}}\right)^\alpha \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^\beta \mathrm{T}^\gamma = \mathrm{M}^{\alpha+\beta}\mathrm{L}^{2\alpha-3\beta}\mathrm{T}^{-2\alpha+\gamma}$$
Il faut alors résoudre le système
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 3\beta = 1 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \beta = -1/5 \\ \gamma = 2/5 \end{cases}$$
ce qui mène à l'expression
$$\boxed{r = k_0 \sqrt[5]{\frac{Et^2}{\rho}}}$$
On retrouve bien que le rayon r est proportionnel au temps à la puissance $2/5$: le modèle proposé est cohérent avec les constatations expérimentales et on peut alors en déduire l'expression du coefficient de proportionnalité k :
$$k = k_0 \sqrt[5]{\frac{Et^2}{\rho}} \quad \text{soit} \quad \boxed{E = \rho \left(\frac{k}{k_0}\right)^5}$$
Comme vu précédemment, k peut être déterminé expérimentalement à partir de l'analyse des images du film. De plus on connait l'ordre de grandeur de la masse volumique $\rho \approx 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.
Si on admet $k_0 \approx 1$, on peut en déduire l'ordre de grandeur de l'énergie E dégagée par la bombe.