CT – TD 1

Analyse dimensionnelle

Méthodes, compétences et savoirs-faire

1 - Cahier d'entraînement

Fiche d'entraînement n°1 – Conversions

2 - Conversions

1. Convertir : 30°12' en rad puis 0,043 rad en degrés minutes et secondes.
   On rappelle que :
   — une minute, notée 1', vaut $\left(\frac{1}{60}\right)°$,
   — une seconde, notée 1", vaut $\left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)°$.

3 - Homogénéité d'une expression

Vérifier l'homogénéité des expressions suivantes :

1. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ et $R = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$ où R_1 et R_2 sont 2 résistances électriques.
2. (a) $x = vt^2 + 2at$
   (b) $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$
   (c) $x = v_0 t + 2at^2$
   où x représente une distance, v une vitesse, a une accélération et t le temps. L'indice 0 se rapporte lui à une quantité au temps $t = 0$.
3. $x = \frac{v_0}{\tau}\cos(2\pi\frac{t}{\tau})$ où x représente la position d'un objet, v_0 sa vitesse initiale et t et τ des temps.
4. $i = i_0 \exp(-\frac{t}{\tau^2})$ où t et τ désignent des temps, i le courant dans le circuit à l'instant t et i_0 sa valeur initiale.

4 - Dimension d'une expression

1. Dans le cadre d'un écoulement turbulent, la force de frottement agissant sur un corps est proportionnelle au carré de sa vitesse. Formuler cette loi par une équation et donner l'unité SI de la constante de proportionnalité (on rappelle qu'une force s'exprime en newtons, $1\,\mathrm{N} = 1$ kg.m s^{-2}).
2. A partir de la loi d'Ohm et de la relation courant-tension aux bornes d'un condensateur, montrer que le produit d'une résistance R avec une capacité C est homogène à un temps. Comment pourrait-on interpréter ce produit RC dans le cadre d'un signal transitoire ? périodique ?
3. (a) En vous rappelant la formule célèbre d'Einstein, donnez la dimension d'une énergie, puis exprimez son unité, la joule (J) en fonction des unités de base du SI.
   (b) On rappelle qu'une puissance est définie comme une énergie par unité de temps, en déduire sa dimension. Exprimez de la même manière le watt (W) en unités SI de base
   (c) À partir de l'expression de la puissance dissipée par effet Joule, en déduire la dimension d'une tension électrique et exprimez son unité, le volt (V) en unités SI de base.

I - Théorème Π et applications

Le **théorème** Π (ou théorème de **Vaschy-Buckingham**) énonce :

> Toute loi physique reliant n grandeurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$; impliquant m dimensions indépendantes, peut s'écrire sous la forme
> $$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = 0$$
> faisant intervenir $m = n - p$ paramètres π_i **sans dimension** et **indépendants**.

En pratique, ce théorème est très utile pour **déterminer la forme possible d'une solution** dans des problèmes comportant un nombre limité de paramètres. La méthode consiste à :

1. **Exprimer la solution** comme un produit des différents paramètres, chacun élevé à un exposant inconnu.
2. **Appliquer une analyse dimensionnelle** à cette expression, ce qui fournit un système d'équations sur les exposants.
3. **Résoudre le système** pour déterminer la forme de l'expression recherchée.

Il est cependant important de noter que cette expression n'est définie qu'**à une constante sans dimension près**.

Exemple : Surface d'un disque

On cherche à déterminer la surface S d'un disque de rayon R.

Étape 1 : Forme de la solution
On admet que R est le seul paramètre intervenant dans l'expression de S, on écrit alors $S = k\,R^\alpha$ où k est une constante **sans dimension** et α un exposant inconnu.

Étape 2 : Analyse dimensionnelle
On remplace par les dimensions : $[S] = [kR^\alpha] = [k][R]^\alpha \implies L^2 = 1 \cdot L^\alpha \implies 2 = \alpha$

Étape 3 : Résolution
Ici le système d'équations est de dimension 1, on a directement la solution : $\boxed{S = kR^2}$
Remarques :

— On ne peut omettre la constante sans dimension k. Dans l'exemple précédent on a évidemment $k = \pi$ mais on aurait également pu partir du diamètre D plutôt que du rayon R. L'analyse dimensionnelle aurait été identique et on aurait obtenu $S = k'D^2$ avec cette fois-ci évidemment $k' = \pi/4$. On ne peut donc connaitre que la forme de la solution et pas son expression exacte. Cela permet néanmoins de tirer des conclusions sur la grandeur inconnue : par exemple, sans avoir déterminé k, on peut dire que si on double le rayon d'un disque, sa surface sera multipliée par 4 ($= 2^2$).

— Ce n'est pas une méthode « magique » qui permet de toujours s'en sortir : il faut d'une part être sûr d'avoir pris en compte tous les paramètres qui peuvent intervenir dans la grandeur que l'on cherche à exprimer et d'autre part, cette méthode ne fonctionne que dans certains cas. Par exemple, si l'on cherche à exprimer le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h, les formules

$$V = k_1 R^3 \qquad V = k_2 R^2 h \qquad V = k_3 R h^2 \qquad V = k_4 h^3$$

(avec k_i des constantes sans dimensions) sont toutes homogènes. Il n'est ici pas possible de déterminer l'expression de V juste à partir d'un raisonnement dimensionnel.

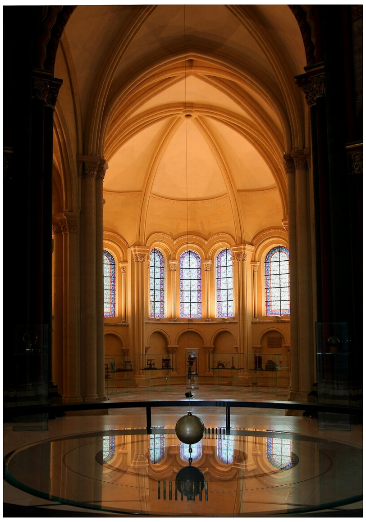
1 - Période d'un pendule

On cherche la période T d'un pendule simple de longueur L et de masse m, soumis à la gravité g.

1. Utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer l'expression de T en fonction des paramètres du problème. Une constante sans dimension k interviendra dans l'expression proposée.

On mesure la période du pendule de Foucault situé au musée des Arts et Métiers. On a pour celui-ci $L = 18\,\mathrm{m}$, $m = 25\,\mathrm{kg}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et on mesure $T = 8{,}5\,\mathrm{s}$.

2. On rajoute une deuxième masse identique au bout de la corde. Que devient la période ?
3. On divise la longueur de la corde du pendule par 2. Quelle est la nouvelle période T' ?
4. Déterminer la valeur de la constante k. La mettre sous une forme faisant intervenir un nombre bien connu. En déduire l'expression complète de T.



Pendule de Foucault

Source : Musée des arts et métiers, Cnam / Photo Philippe Hurlin

2 - L'analyse dimensionnelle qui fit trembler l'armée américaine

En 1950, en pleine guerre froide, les États-Unis diffusent imprudemment un film montrant l'explosion d'une bombe atomique. Le physicien Geoffrey Ingram Taylor, sans disposer d'aucune donnée officielle (strictement classées secret défense), parvient à estimer l'énergie libérée par la bombe... simplement en analysant les images. Son observation clé : le rayon du champignon atomique croît avec le temps selon la loi expérimentale

$$r(t) \propto t^{5/2}.$$

1. Quelle courbe faudrait-il tracer pour vérifier cette relation de proportionnalité ?

Taylor pose alors l'hypothèse que l'expansion de la sphère de gaz enflammé dépend uniquement :

— du temps t,

— de l'énergie E libérée,

— de la masse volumique de l'air ρ.

2. En utilisant uniquement l'analyse dimensionnelle, reconstituer le raisonnement de Taylor et montrer comment il a pu estimer l'énergie de l'explosion, à une constante numérique sans dimension près (supposée proche de 1).

Donnée : masse volumique de l'air : $\rho \approx 1{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$