CTE – Chapitre D

Machines cycliques dithermes

I - Principe des machines thermiques

I.1 - Définitions et modélisation

Notion de machine thermique

Une **machine thermique** est un système thermodynamique (souvent un fluide) qui échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de **travail** et de **transferts thermiques**, au cours d'une succession de transformations formant un **cycle**. L'objectif est soit de convertir de la chaleur en travail (**moteur thermique**), soit d'utiliser du travail pour déplacer de la chaleur (**machine réceptrice**).

Dans la majorité des situations, les échanges de chaleur se font avec des **thermostats**.

Définition : Thermostat

Un**thermostat** est un système thermodynamique capable d'échanger de la chaleur avec l'extérieur **sans variation de sa propre température**.

Exemples : atmosphère, océan, réservoir d'eau, flamme de combustion à débit constant, mélange eau–glace.

Définition : Efficacité énergétique

L'**efficacité** (ou performance) énergétique η d'une machine thermique est le rapport de l'énergie (ou puissance) **utile** à l'énergie (ou puissance) **dépensée** (ou consommée).

η est un coefficient sans dimension, positif, mais nous verrons que, dans certaines situations, il est possible d'avoir $\eta > 1$!

Application : Ordres de grandeur

Calculer l'énergie récupérée lors du refroidissement de 1 L d'eau de 1 °C. Si toute l'énergie récupérée était transformée en énergie potentielle de pesanteur, de quelle hauteur pourrait-on faire monter la même quantité d'eau ?
Même question si on fait maintenant geler 1 L d'eau, sans changer la température.
On donne : capacité calorifique massique de l'eau $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ\,K^{-1}\,kg^{-1}}$, chaleur latente de fusion de la glace $l_f = 335\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.

Machine ditherme

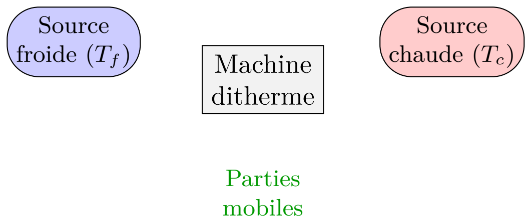
Définition : Machine thermique ditherme

Une **machine thermique ditherme** est une machine qui échange de la chaleur avec exactement **deux sources de chaleur** :

— la **source chaude**, à la température T_c ;

— la **source froide**, à la température T_f.

avec $T_c > T_f$.



Le système échange :

— une quantité de chaleur Q_c avec la **source chaude** (température T_c) ;

— une quantité de chaleur Q_f avec la **source froide** (température T_f) ;

— un travail W avec l'extérieur.

On rappelle que les quantités W, Q_f et Q_c ne sont pas des fonctions d'état et sont des grandeurs **algébriques** : elles sont positives si le système (textitie. la machine thermique) *reçoit* de l'énergie depuis l'extérieur, négatives si le système *cède* de l'énergie.

Machine cyclique

Définition : Machine cyclique

Une machine est dite **cyclique** si le fluide qui la constitue revient périodiquement à son état initial. Sur un cycle complet, toutes les fonctions d'état reviennent à leur valeur initiale :

Application du premier principe sur un cycle Pour un système fermé, le premier principe donne $\Delta U = W + Q$. Sur un cycle complet, $\Delta U = 0$, donc, pour une machine ditherme :

Loi : Bilan énergétique d'un cycle

Application du second principe sur un cycle Sur un cycle complet, $\Delta S = 0$. En notant $S^c \geq 0$ l'entropie créée (irréversibilités) et, pour une machine ditherme, T_c, T_f les températures des sources :

Loi : Bilan entropique d'un cycle

I.2 - Machine motrice

Définition : Moteur thermique

Un **moteur thermique** est une machine cyclique ditherme qui **produit du travail** en prélevant de la chaleur sur la source chaude et en en rejetant une partie à la source froide.

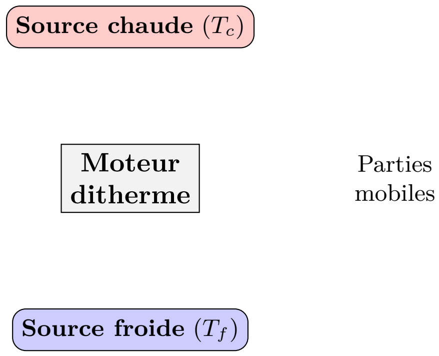
Sens réel des échanges

Un moteur **fournit** (cède) du travail donc $\boxed{W < 0}$. On a ainsi $Q_c + Q_f = -W > 0$ soit $Q_f > -Q_c$. Par ailleurs, l'inégalité de Clausius donne $-Q_c \geq \dfrac{T_c}{T_f} Q_f$ et donc

$$\frac{T_c}{T_f} Q_f \leq -Q_c < Q_f \quad \text{soit} \quad \frac{T_c}{T_f} Q_f < Q_f$$

Comme $\dfrac{T_c}{T_f} > 1$, cela impose $\boxed{Q_f < 0}$: le système cède de la chaleur à la source froide. On peut alors écrire $Q_c = -(W + Q_f)$ et donc $\boxed{Q_c > 0}$: le système récupère de la chaleur depuis la source chaude.

Propriété : Diagramme des échanges
Le sens *réel* des échanges y est indiqué :



Perfomance énergétique

L'énergie utile est le travail *fourni* par le moteur, donc $\mathcal{E}_{utile} = -W$. L'énergie consommée est la chaleur fournie par la source chaude, donc *reçue* par le moteur : $\mathcal{E}_{cons} = Q_c$.
On en déduit la performance énergétique du moteur (ou **rendement** thermodynamique) :

Définition : Efficacité d'un moteur (rendement)

$$\eta = \left| \frac{\mathcal{E}_{\text{utile}}}{\mathcal{E}_{\text{cons}}} \right| = \frac{\text{travail produit}}{\text{chaleur reçue de la source chaude}} \quad \text{soit}$$

En combinant le premier principe ($W = -Q_c - Q_f$) et la définition de η :

$$\eta = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

Comme $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$, on a toujours $0 < \eta < 1$: **un moteur ne peut pas convertir intégralement la chaleur en travail**.

I.3 - Machine réceptrice

Définition : Machine réceptrice

Un **récepteur thermique** est une machine cyclique ditherme qui reçoit du travail pour **faire circuler de la chaleur de la source froide vers la source chaude**.

On distingue deux types de machines réceptrices selon l'objectif attendu :

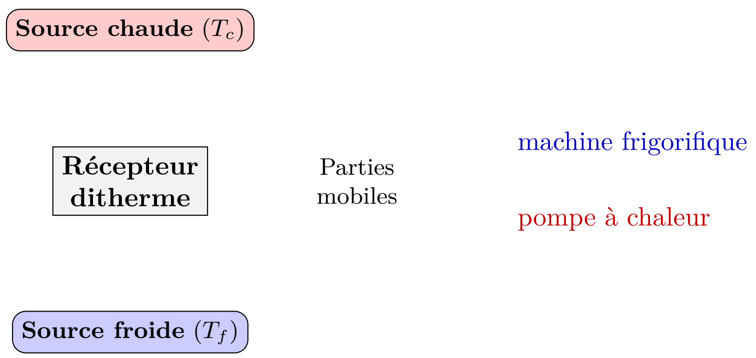
— **machine frigorifique** : l'objectif est de **refroidir la source froide** ($Q_f > 0$).
— **pompe à chaleur** : l'objectif est de **réchauffer la source chaude** ($Q_c < 0$).

Sens réel des échanges

Prenons le cas d'une machine frigorifique : $\boxed{Q_f > 0}$. L'inégalité de Clausius donne alors $\dfrac{Q_c}{T_c} \leq -\dfrac{Q_f}{T_f} < 0$ et donc $\boxed{Q_c < 0}$. Comme $T_f < Tc$, cela impose également $(Q_c) > Q_f$ et donc avec $W = -(Q_c + Q_f)$, $\boxed{W > 0}$. Une machine frigorifique consomme du travail (mécanique ou électrique) et fournit de la chaleur à la source froide (en général l'air de la pièce dans laquelle elle est située).
Pour une pompe à chaleur, $\boxed{Q_c < 0}$, rien n'impose en théorie d'avoir $Q_f < 0$, mais cela signifierait que la machine thermique réchauffe la source chaude et la source froide : on n'est pas dans le cas d'une pompe à chaleur, mais dans celui d'un radiateur (et donc $W = -Q_c - Q_f > 0$). On considère donc que, pour une « vraie » pompe à chaleur $\boxed{Q_f > 0}$. On retrouve alors $\boxed{W > 0}$.

On retient que ces deux types de machine ont un fonctionnement strictement identique, seuls les objectifs (refroidir la source froide ou réchauffer la source chaude) diffèrent.

Propriété : Diagramme des échanges



Perfomance énergétique

Dans les deux cas, l'énergie consommée est le travail *reçu* par la machine : $\mathcal{E}_{cons} = W$, en revanche, l'énergie utile diffère selon le type de la machine : pour la machine frigorifique, il s'agit de la chaleur extraite (donc *reçue*) depuis la source froide : $\mathcal{E}_{utile} = Q_f$, pour la pompe à chaleur de la chaleur *fournie* à la source chaude : $\mathcal{E}_{utile} = -Q_c$. L'expression de la performance énergétique de la machine réceptrice (également appelée **efficacité énergétique** e) dépend donc de son type.

— **Machine frigorifique** : l'objectif est de **refroidir la source froide** (régrigérateur, congélateur, climatiseur, ...). L'énergie utile est la chaleur *recue* depuis la source froide : $\mathcal{E}_{utile} = Q_f$. L'efficacité est le coefficient de performance (COP) frigorigène :

Définition : Efficacité d'une machine frigorifique (COP)

$$e_f = \left|\frac{\mathcal{E}_{\text{utile}}}{\mathcal{E}_{\text{cons}}}\right| = \frac{\text{effet utile frigorigène}}{\text{travail consommé}} \quad \text{soit}$$

— **Pompe à chaleur** : l'objectif est de **chauffer la source chaude**. L'énergie utile est la chaleur *cédée* à la source chaude : $\mathcal{E}_{utile} = -Q_c$. L'efficacité est le COP thermodynamique :

Définition : Efficacité d'une pompe à chaleur (COP)

$$e_c = \left|\frac{\mathcal{E}_{\text{utile}}}{\mathcal{E}_{\text{cons}}}\right| = \frac{\text{effet utile calorifique}}{\text{travail consommé}} \quad \text{soit}$$

Remarque : pour une machine réceptrice, on peut établir la relation suivante entre e_c et e_f à partir de la conservation de l'énergie sur le cycle :

$$e_c = e_f + 1$$

Application : Bilan d'énergie d'unrécepteur thermique

1. Une pompe à chaleur prélève $Q_f = 3\,\text{kJ}$ à la source froide et consomme $W = 1\,\text{kJ}$ de travail électrique. Calculer Q_c et e_c.
2. Un régrigérateur de COP $e_f = 4$, a une consommation moyenne $\mathcal{P} = 40\,\text{W}$. Calculer les puissances thermqiues $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_c$.

II - Le second principe et la limite de Carnot

II.1 - Inégalité de Clausius et irréversibilités

Le second principe, appliqué à une machine cyclique ditherme échangeant Q_c avec la source à T_c et Q_f avec la source à T_f, donne le bilan entropique :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = S^{\text{éch}} + S^{\text{créé}} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S^{\text{créé}} = 0$$

Puisque $S^{\text{créé}} \geq 0$, on en déduit :

Loi : Inégalité de Clausius

avec égalité si et seulement si la machine est **réversible** ($S^{\text{créé}} = 0$).

Remarque : Cas d'une machine monotherme

Le système est en contact avec un thermostat unique. L'inégalité de Clausius s'écrit alors

Conclusion : le moteur cyclique monotherme n'existe pas.

II.2 - Efficacité énergétique maximale

Moteur thermique

Propriété : Rendement maximal (moteur)

Pour tout moteur cyclique ditherme fonctionnant entre une source chaude à T_c et une source froide à T_f :

— L'égalité n'est atteinte que pour une machine **réversible**.

— le rendement de Carnot η_{Carnot} ne dépend que des températures des deux sources.

Démonstration

On repart des deux bilans et de la définition du rendement $\eta = \frac{-W}{Q_c}$:

Application : Ordres de grandeur

Calculer le rendement maximal pour une machine à vapeur ($T_{c1} \approx 400\,\text{K}$), une centrale électrique thermique ($T_{c2} \approx 600\,\text{K}$) puis un moteur à combustion ($T_{c3} \approx 1200\,\text{K}$). La source froide est l'atmosphère, à la température $T_f \approx 300\,\text{K}$.

Machine réfrigérante

Propriété : Efficacité maximale (machine réfrigérante)

Pour toute machine réfrigérante cyclique ditherme fonctionnant entre une source chaude à T_c et une source froide à T_f :

— L'égalité n'est atteinte que pour une machine **réversible**.

— l'efficacité de Carnot $e_{f,\text{Carnot}}$ ne dépend que des températures des deux sources.

Démonstration

On part des deux bilans et de la définition du COP frigorifique $e_f = \frac{Q_f}{W}$:

L'égalité est atteinte pour $\dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} = 0$, soit $S^{\text{cr}} = 0$, c'est-à-dire pour une machine réversible.

Application : Ordres de grandeur

Calculer l'efficacité maximale pour un réfrigérateur ($T_{f1} = 4\,°\text{C}$) et un congélateur ($T_{f2} = -18\,°\text{C}$). La source chaude est l'atmosphère, à la température $T_c = 24\,°\text{C}$.

Pompe à chaleur

Propriété : Efficacité maximale (pompe à chaleur)

Pour toute pompe à chaleur cyclique ditherme fonctionnant entre une source chaude à T_c et une source froide à T_f :

- L'égalité n'est atteinte que pour une machine **réversible**.
- l'efficacité de Carnot $e_{f,\text{Carnot}}$ ne dépend que des températures des deux sources.

Démonstration

On part des deux bilans et de la définition du COP thermodynamique $e_c = -\frac{Q_c}{W}$:

L'égalité est atteinte pour $\dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} = 0$, soit $S^{\text{cr}} = 0$, c'est-à-dire pour une machine réversible.

Application : Ordres de grandeur

Calculer l'efficacité maximale d'une pompe à chaleur qui chauffe un fluide dans un sol chauffant jusqu'à une température $T_c = 35\,°\text{C}$, la source froide etant l'air extérieur à la température $T_f = 5\,°\text{C}$.

II.3 - Machine de Carnot

Définition : Cycle de Carnot

Le cycle de Carnot est le cycle réversible canonique d'une machine ditherme. Pour un gaz parfait, il est constitué de **quatre transformations réversibles** :

1. **Détente isotherme réversible** à T_c : le fluide reçoit $Q_c > 0$ de la source chaude.
2. **Détente adiabatique réversible (isentropique)** : passage de T_c à T_f sans échange de chaleur.
3. **Compression isotherme réversible** à T_f : le fluide cède $|Q_f| = -Q_f$ à la source froide.
4. **Compression adiabatique réversible (isentropique)** : retour de T_f à T_c sans échange de chaleur.

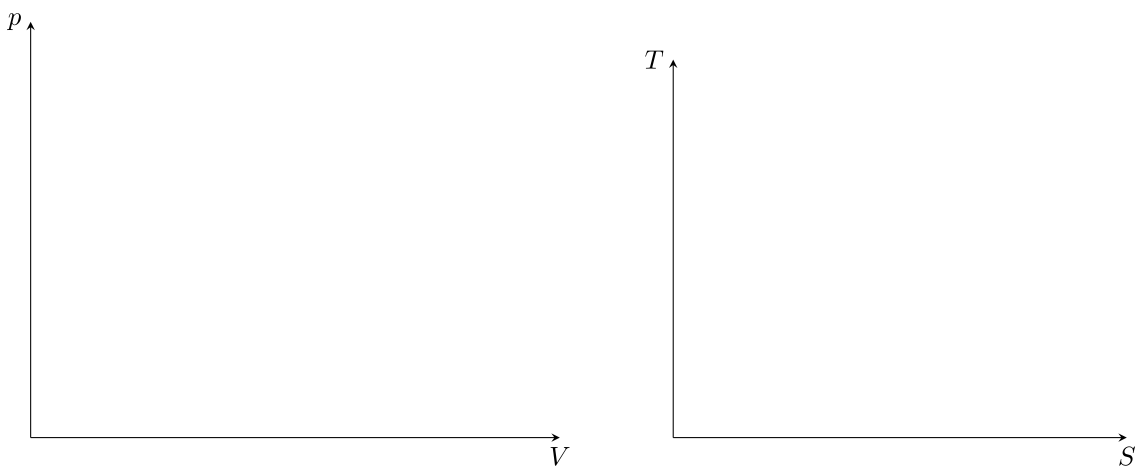
Le cycle de Carnot est donc une succession de deux transofrmations isothermes réversibles (contacts avec les thermostats) et deux transformations adiabatiques réversibles (entre les contacts avec les thermostats).

Représentation graphique

On utilise généralement 2 graphes pour représenter les transformations du système sur un cycle réversible :

1. **Diagramme de Watt** (p, V)
2. **Diagramme entropique** (T, S)

Application : Cycle de Carnot pour un gaz parfait



Travail et chaleur dans le cycle de Carnot

Diagramme de Watt

On retrouve

- ☐ sens **trigonométrique** $\iff W_{\text{cycle}} > 0$: le système est **récepteur** ;
- ☐ sens **horaire** $\iff W_{\text{cycle}} < 0$: le système est **moteur**.

Diagramme entropique

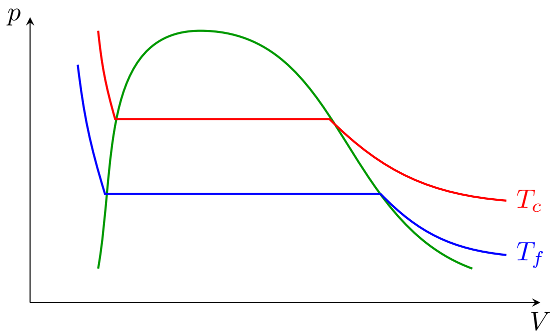
On a également

- ☐ sens **trigonométrique** $\iff W_{\text{cycle}} > 0$: le système est **récepteur** ;
- ☐ sens **horaire** $\iff W_{\text{cycle}} < 0$: le système est **moteur**.

Cycle de Carnot pour un système diphasé

Dans de nombreuses machines thermiques, on exploite les transferts de chaleur associés aux changements d'état afin d'optimiser l'énergie utile produite par le système : travail dans le cas d'un moteur, chaleur extraite de la source froide pour une machine frigorifique, ou chaleur cédée à la source chaude pour une pompe à chaleur. En particulier, la transition liquide–vapeur est largement utilisée, notamment dans les machines à vapeur ainsi que dans les cycles d'évaporation–condensation des réfrigérateurs et des systèmes similaires.

Application : Cycle de Carnot moteur pour un mélange liquide–vapeur



On part des points de rosée et d'ébullition sur l'isotherme T_c

Rendement absolu et comparaison à Carnot

En pratique, il est utile de comparer le rendement effectif d'une machine à la limite de Carnot. On définit le **rendement absolu** :

Définition : Rendement absolu

où η_{Carnot} est l'efficacité du cycle de Carnot dont les sources froide et chaude sont à la même température que celles du cycle réel.

r est compris entre 0 et 1 ; plus il est proche de 1, plus la machine s'approche du comportement réversible idéal. L'écart $1 - r$ mesure les pertes dues aux irréversibilités (frottements, transferts thermiques avec gradient fini, détentes brutales...). C'est un outil précieux pour l'ingénieur souhaitant améliorer le rendement d'un système.

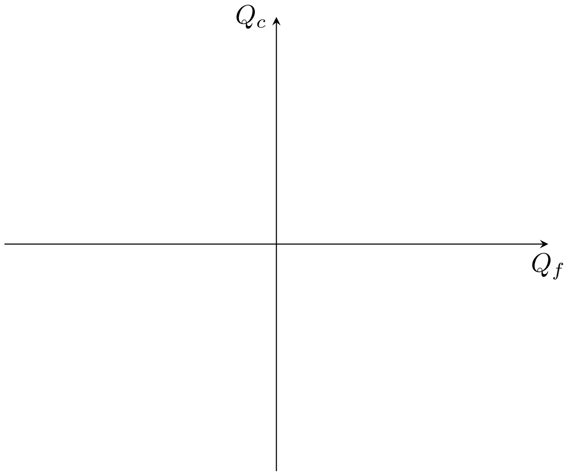
II.4 - Diagramme de Raveau

Le diagramme de Raveau en thermodynamique des machines est un outil graphique qui représente les échanges d'énergie d'une machine thermique ditherme, en portant en abscisse la chaleur échangée avec la source froide Q_f et en ordonnée la chaleur échangée avec la source chaude Q_c. Il permet de visualiser immédiatement la nature du dispositif considéré :

1. moteur thermique (produit un travail utile),
2. machine réceptrice (refroidit la source froide et réchauffe la source chaude),
3. « inutile » (ne produit pas de travail et n'inverse pas les transferts spontanés de chaleur)
4. machine impossible physiquement.

Il est également très utile pour classer rapidement le fonctionnement d'une machine à partir de ses bilans énergétiques, et pour vérifier si un cycle donné est compatible avec les lois de la thermodynamique, sans avoir à refaire tous les calculs à chaque fois.

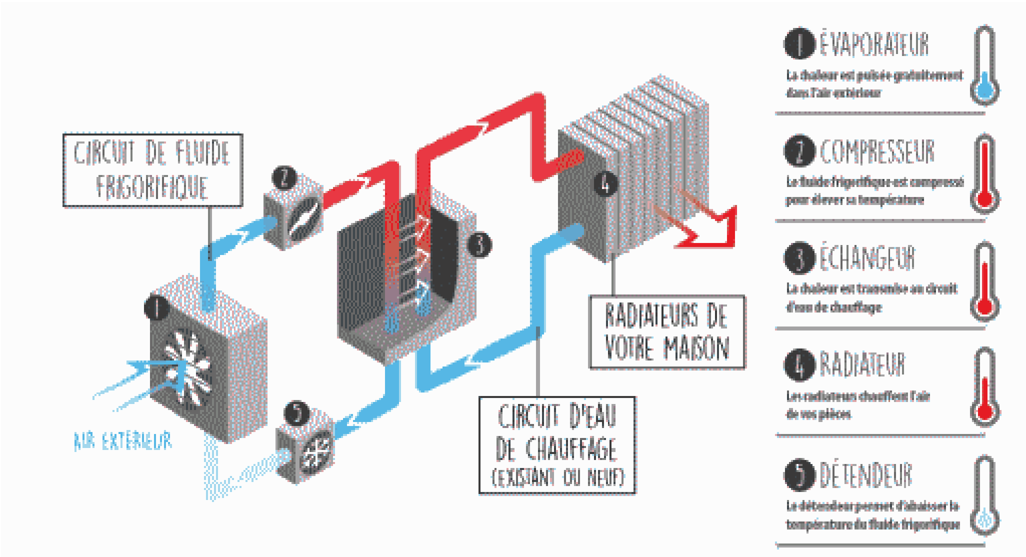
Application : Diagramme de Raveau des machines dithermes

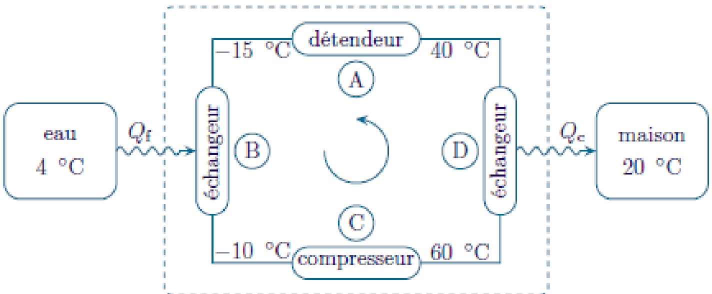


III - Exemples de machines réelles

III.1 - Machines réceptrices

Dans une machine réceptrice, on fournit un travail ($W > 0$) pour refroidir la source froide ($Q_f > 0$) et réchauffer la source chaude ($Q_c < 0$).
Si l'objectif est de réchauffer la source chaude, il s'agit d'une pompe à chaleur :



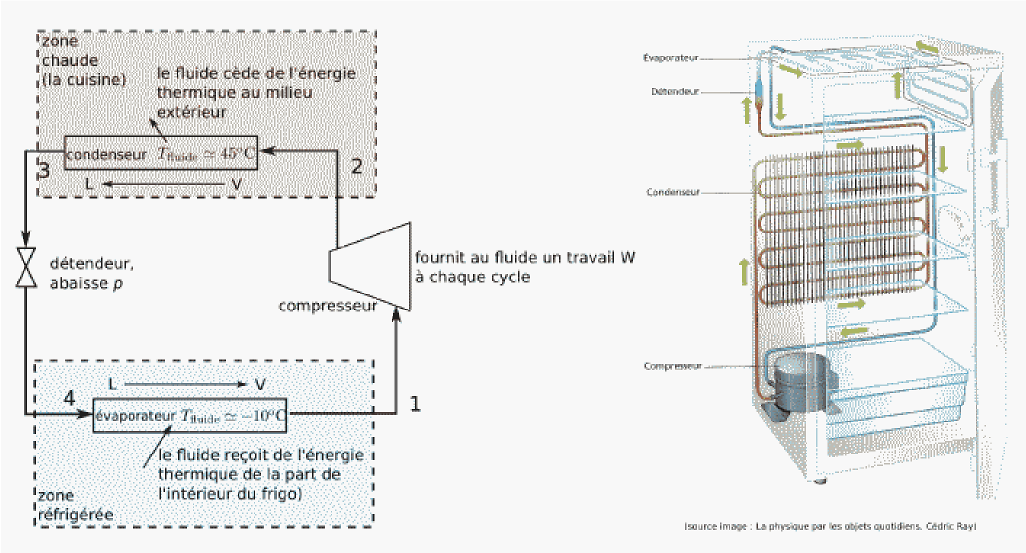


Le schéma synoptique représenté ci-dessus montre que la pompe à chaleur est constitué d'un fluide en écoulement (par ex. du fréon) subissant tout un cycle de transformations :

- Ⓐ un détendeur abaissant la température de 40 °C à −15 °C
- Ⓑ un échangeur thermique permettant de prendre de l'énergie à l'eau à 4 °C
- Ⓒ un compresseur augmentant la température de −10 °C à 60 °C
- Ⓓ un échangeur thermique permettant de donner de l'énergie à l'air de la maison à 20 °C

Et finalement, quand nous faisons le bilan de l'ensemble, nous voyons que de l'énergie est enlevée à la source froide, de l'énergie fournie à la source chaude et que tout ça ne fonctionne « que » en injectant de l'énergie électrique.

Si l'objectif est de refroidir la source froide, le principe est exactement le même, il s'agit alors d'une machine réfrigérante :



Remarques :

— on utilise des changements d'état pour avoir des transformations isothermes et pouvoir transférer des quantités importantes de chaleur ;

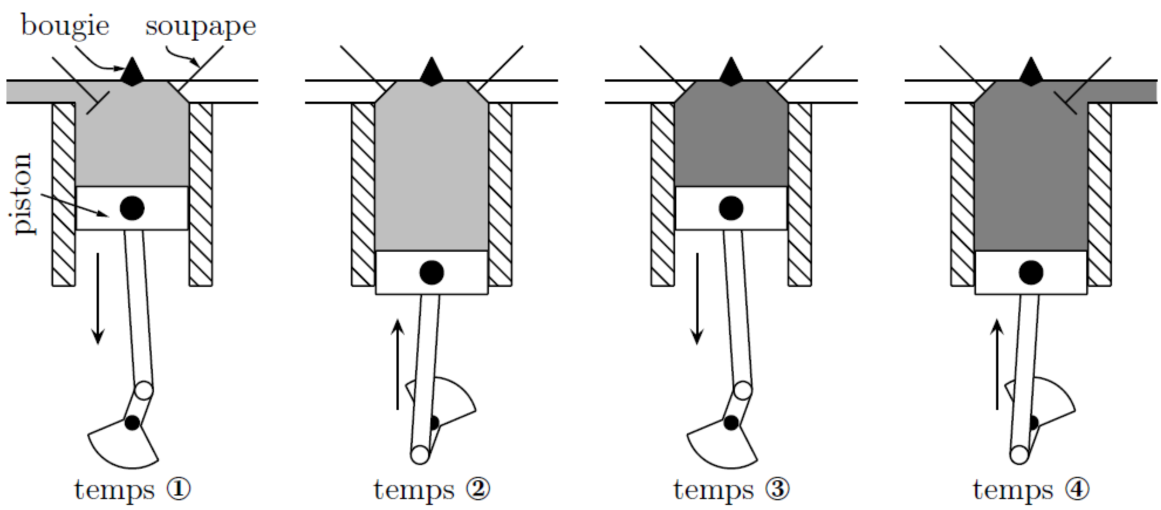
— l'étude détaillée de ce type de cycle nécessite de s'intéresser à des systèmes ouverts, elle ne sera pas menée cette année.

III.2 - Exemple de moteur : moteur à 4 temps

Dans un moteur à explosion, un mélange air-carburant est enflammé et explose. L'énergie libérée par la transformation chimique de combustion est récupérée et « convertie » sous forme de travail.

Moteur à 4 temps

Dans un moteur à essence « usuel », le fonctionnement est représenté par les schémas suivants.



— 1^er^temps : admission. La (les) soupape(s) d'admission s'ouvre(nt) et le mélange air-carburant entre dans le cylindre. À la fin de de temps, la (les) soupape(s) se referme(nt).

— 2^e^temps : compression. Le piston remonte diminuant ainsi le volume de la chambre.

— L'explosion. Ce n'est pas un temps en soi : c'est entre le 2^{e}et le 3^{e}temps. Une bougie crée une étincelle qui initie la réaction de combustion entre l'air et le carburant. Cette combustion est extrêmement rapide : c'est une explosion. Elle est si rapide que le piston a à peine le temps de bouger.

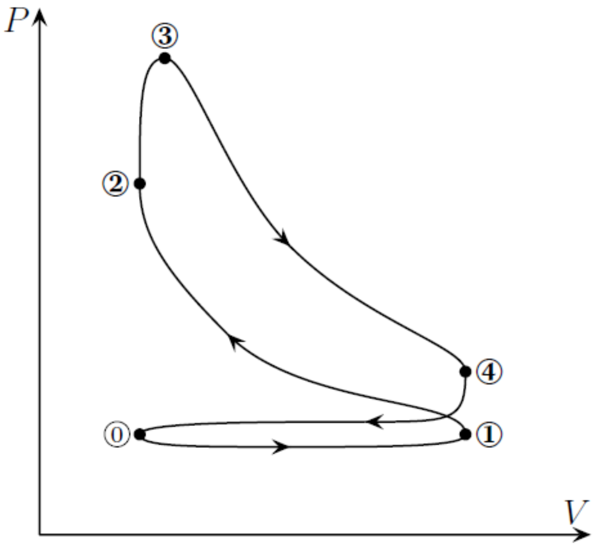
— 3^{e}temps : détente. C'est le temps moteur : le gaz échauffé par l'explosion repousse violemment le piston vers le bas. C'est à ce moment là que le travail est véritablement fourni au piston.

— 4^{e}temps : échappement. La (les) soupape(s) d'échappement s'ouvre(nt) et le mélange de gaz brûlés est évacué de la chambre par la remontée du piston.

— Remarquons qu'il faut deux aller-retour du piston dans le cylindre pour faire un cycle complet

Représentation du cycle réel

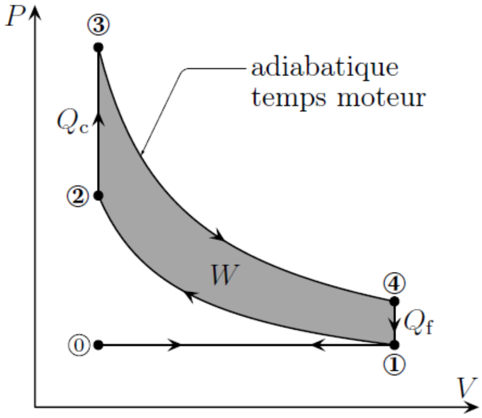
Une représentation qualitative du cycle réel est donnée ci-dessous, où la pression est celle régnant dans la chambre alors que le volume est celui de la chambre.

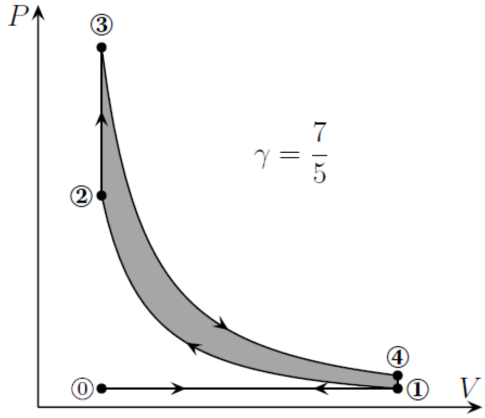


- Au point ⓪, le piston est à son point mort haut, ie. il est à sa position la plus haute possible, le volume à l'intérieur de la chambre est alors très faible mais pas nul.
- Lors de l'admission ♠ → ① le volume augmente et il y a à l'intérieur de la chambre une très légère dépression due au passage du gaz par l'étroit passage laissé par l'ouverture des soupapes.
- Lorsque le piston est à son point mort bas, le volume de la chambre est maximal et les soupapes se ferment (point ①).
- La compression ① → ② correspond au 2e temps. Le volume diminue, la pression augmente.
- Lorsque le piston a de nouveau atteint son point mort haut (volume minimal) en ②, une bougie crée une étincelle qui provoque la combustion très rapide des gaz (explosion) entre les points ② et ③. Lors de cette combustion, le piston n'est que très peu descendu.
- Lors de la détente ③ → ④, le piston descend jusqu'à son point mort bas, ie. jusqu'à ce que le volume de la chambre soit minimal.
- Lorsque les soupapes s'ouvrent (en ④) le contact direct entre les gaz déjà échappés et les gaz brûlés dans la chambre provoque un refroidissement brutal.
- Le mouvement du piston vers le haut (diminution du volume) permet d'évacuer les gaz brûlés de ④ à ⓪ et un nouveau cycle peut recommencer.
- Finalement, nous pouvons voir que ce diagramme s'il représente une évolution cyclique, ne représente pas l'évolution cyclique d'un système fermé.

Un modèle simplifié

Nous allons adopter un modèle simplifié du système, qui permettra alors de le représenter par une machine thermique ditherme. On supposera que le mélange gazeux air-carburant se comporte comme un gaz parfait diatomique. On fait aussi l'hypothèse plus drastique qu'en dépit de la réaction chimique de combustion les caractéristiques du gaz (capacités thermiques C_p et C_v , coefficient isentropique γ et surtout quantité de matière n) ne varient pas pendant les transformations.
Les transformations sont modélisées dans le cycle représenté ci-dessous, appelé cycle de Beau de Rochas.





- La transformation ⓪ → ① sera considérée comme étant **isobare**.
- La transformation ① → ② sera considérée comme **adiabatique**. En effet rien, lors de cette compression, ne vient apporter de l'énergie au gaz. De plus comme lors de cette admission il n'y a pas d'explosion, pas de choc et que les mouvements du piston ne se fait pas à la vitesse du son, nous pouvons supposer que le gaz est toujours en équilibre thermodynamique interne, ie. que la transformation est **réversible**.
- L'explosion ② → ③ est modélisée par une **isochore**.
- Lors de la détente ③ → ④, nous pouvons considérer, comme pour la compression que la transformation est **adiabatique** et **réversible** (insistons sur le fait que l'explosion est terminée lors de la détente).
- L'ouverture des soupapes d'échappement va créer un brusque refroidissement **isochore** ④ → ①.
- L'échappement ① → ⓪ est modélisé aussi par une **isobare**.

Dans cette modélisation extrêmement simplifiée, on considère qu'admission et échappement sont exactement inverses et se compensent. On admet donc que le fluide « unique » de nos hypothèses parcourt un cycle ① → ② → ③ → ④ → ① pendant lequel il est en contact avec une source chaude (fictive et qui modélise le fait que de l'énergie thermique est fournie au fluide lors de la réaction chimique exothermique de combustion du mélange de carburation) et une source froide (l'atmosphère, lors de l'ouverture de la soupape d'échappement). On a donc : $Q_c = Q_{2\to3}$ et $Q_f = Q_{4\to1}$.

S'agissant d'un moteur cyclique ditherme, l'efficacité thermodynamique ou rendement est :

$$\eta \equiv -\frac{W_{cycle}}{Q_c}$$

où Q_c est le transfert thermique échangé avec la source chaude. D'autre part, compte tenu du premier principe de la thermodynamique des systèmes fermés : $\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle} = 0$, d'où

$$W_{cycle} = -Q_{cycle} = -(Q_{1\to2} + Q_{2\to3} + Q_{3\to4} + Q_{4\to1})$$

Étant donné que ① → ② et ③ → ④ sont des évolutions adiabatiques, $Q_{1\to2} = Q_{3\to4} = 0$. Finalement :

$$\eta = \frac{Q_f + Q_c}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_{4\to1}}{Q_{2\to3}}$$

Étude de l'évolution ② → ③ (explosion) :

— l'évolution est isochore, donc $W_{2\to3} = 0$ donc $\Delta U_{2\to3} = W_{2\to3} + Q_{2\to3} = Q_{2\to3}$;
— le système est assimilé à un gaz parfait donc $\Delta U_{2\to3} = C_V(T_3 - T_2)$;
— finalement : $\boxed{Q_{2\to3} = C_V(T_3 - T_2)}$.

Étude de l'évolution ④ → ① (ouverture de la soupape d'échappement) :

- l'évolution est isochore, donc $W_{4\to1} = 0$ donc $\Delta U_{4\to1} = W_{4\to1} + Q_{4\to1} = Q_{4\to1}$;
- le système est assimilé à un gaz parfait donc $\Delta U_{4\to1} = C_V(T_1 - T_4)$;
- finalement : $\boxed{Q_{4\to1} = C_V(T_1 - T_4)}$.

On trouve donc :

$$\eta = 1 + \frac{Q_{4\to1}}{Q_{2\to3}} = 1 + \frac{C_V(T_1 - T_4)}{C_V(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1 - T_4}{T_2 - T_3}$$

On remarque que l'efficacité ne dépend que des températures du système au cours du cycle. Cette expression serait suffisante si on pouvait mesurer les quatre températures, ce qui est généralement impossible (les cycles sont beaucoup trop rapides pour qu'on puisse avoir le temps d'y mesurer quatre températures différentes correspondant à quatre points parfaitement déterminés du cycle).

On préfère donc exprimer l'efficacité thermodynamique du moteur en fonction de deux autres paramètres :

- un paramètre mécanique : le rapport volumétrique de compression $a = \frac{V_{max}}{V_{min}}$;
- un paramètre chimique : le rapport $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

On étudie pour cela les deux évolutions ① → ② et ③ → ④. Ces deux évolutions sont adiabatiques ($Q = 0$) et réversibles ($S^c = 0$). Pour ces deux évolutions on a donc : $\Delta S = \frac{Q}{T_{ext}} + S^c = 0$. Ces deux évolutions sont donc isentropiques. Comme le fluide qui subit ces deux évolutions est un gaz parfait, on peut utiliser les relations de Laplace, par exemple $TV^{\gamma-1} = Cste$. Ce qui donne :

- pour ① → ② : $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ soit $T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1a^{\gamma-1}$;
- pour ③ → ④ : $T_3V_3^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1}$ soit $T_3 = T_4\left(\frac{V_4}{V_4}\right)^{\gamma-1} = T_4a^{\gamma-1}$.

En reportant dans l'expression précédemment trouvée pour η, on en déduit :

$$\eta = 1 - \frac{T_1 - T_4}{T_2 - T_3} = 1 - \frac{T_1 - T_4}{a^{\gamma-1}T_1 - a^{\gamma-1}T_4}$$

. Finalement :

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}}$$

Tel que nous l'avons modélisé l'efficacité du moteur de Beau de Rochas ne dépend que du rapport volumétrique de compression et de la chimie du gaz.

Applications numériques : des valeurs courantes sont $a = 6$, $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$. Alors : $\eta = 0,51$. Concrètement, cela signifie que $|W_{cycle}| = 0,51Q_{ch}$: seuls 51 % de l'énergie thermique dépensée lors de la combustion du mélange de carburation sont récupérés sous forme d'énergie mécanique.

Limitations du modèle :

- On remarque que plus le rapport volumétrique a est élevé, plus η est grand. On pourrait donc être tenté d'augmenter indéfiniment a. Néanmoins, quand a devient trop grand, la pression devient tellement grande pendant la phase de compression que le mélange de carburation explose spontanément de façon incontrôlée : si l'explosion intervient trop tôt, elle risque de contrarier le mouvement de remontée du piston lors de la compression : au mieux, le moteur « cogne » ; au pire, le moteur casse.
- $\eta = 0,51$ est la valeur attendue si on accepte les hypothèses simplificatrices du modèle. Dans la réalité, l'efficacité mesurée est 10 à 20 % plus faible.

Comparaison avec le moteur de Carnot

L'efficacité calculée précédemment est celle d'un modèle réaliste du cycle de Beau de Rochas. On peut chercher à comparer cette efficacité à l'efficacité maximale théorique d'un moteur fonctionnant entre les mêmes sources de chaleur. D'après le théorème de Carnot, cette efficacité est celle du moteur de CARNOT, c'est-à-dire un moteur ditherme entièrement réversible. On a montré que, pour un moteur cyclique ditherme : $\eta_{max} = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_{cc}}$.

La température de la source froide est assez simple à évaluer : c'est la température atmosphérique, atteinte par le système lors de l'ouverture de la soupape d'échappement, c'est-à-dire en ①. En ordre de grandeur, on peut prendre, par exemple, $T_f = T_1 = 3 \cdot 10^2$ K.

La température de la source chaude est la température la plus élevée atteinte au cours du cycle. Dans notre modèle, c'est normal de penser qu'il s'agit de la température atteinte **après** l'explosion : $T_c = T_3$. Pour déterminer T_3, on « remonte » le cycle de point en point, jusqu'à pouvoir exprimer T_3 en fonction d'une température connue, c'est-à-dire ici la température atmosphérique T_1. Il faut donc « remonter » le cycle de ③ à ②, puis de ② à ① :

② → ③ évolution isochore d'un gaz parfait donc $Q_{2\to 3} = C_V(T_3 - T_2)$, d'où $T_3 = T_2 + \frac{Q_{2\to 3}}{C_V}$;

① → ② évolution isentropique d'un gaz parfait donc $T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 a^{\gamma-1}$.

Finalement :

$$\boxed{T_3 = T_1 a^{\gamma-1} + \frac{Q_{2\to 3}}{C_V}}$$

On préfère souvent travailler avec les grandeurs massiques (pour se ramener à un kilogramme de mélange de carburation) : si on note m la masse de fluide qui parcourt le cycle, on a :

- $q_{2\to 3} \equiv \frac{Q_{2\to 3}}{m}$;
- $c_V \equiv \frac{C_V}{m} = \frac{C_{Vm}}{M}$ avec M masse molaire du gaz.

On réécrit :

$$\boxed{T_3 = T_1 a^{\gamma-1} + M\frac{q_{2\to 3}}{C_{Vm}}}$$

q_{CD} est appelé « pouvoir calorifique du carburant ».

Application numérique : en ordre de grandeur $q_{2\to 3} = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$, $C_{Vm} = \frac{5R}{2}$ (mélange de carburation assimilé à gaz parfait diatomique) et $M = 29\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ (mélange de carburation composé de 95 % d'air). On trouve : $T_c = T_3 = 3{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$.
Finalement :

$$\boxed{\eta_{max} = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_1}{T_3}} = 1 - \frac{3 \cdot 10^2}{3{,}4 \cdot 10^3} = 0,91$$

Cela signifie que, dans le cas idéal d'un cycle ditherme entièrement réversible (quasi-statique, sans brutalités, sans aucune dissipation énergétique, sans frottement, etc.) fonctionnant entre les sources de chaleur aux températures T_f et T_c, l'efficacité maximale théorique est de 91 %. Même un cycle « parfait », sans aucun frottement ni perte, *ne peut pas* dépasser l'efficacité maximale théorique de Carnot. Cette limite ne dépend que des températures des sources avec lesquelles le système échange.
Le cycle de Beau de Rochas tel que nous l'avons modélisé a une efficacité de 0,51. Son rendement absolu est donc :

$$r = \frac{\eta}{\eta_{max}} = \frac{\eta}{\eta_{Carnot}} = \frac{0,51}{0,91} = 0,56$$

Il réalise donc 56 % du maximum théorique. L'écart avec le maximum théorique est dû aux irréversibilités du cycle (non quasi-staticités, brutalités, pertes énergétiques, frottements, etc.).