

MI – Chapitre A

Cinématique du point

Dans ce premier chapitre de mécanique, nous allons nous intéresser à la cinématique du point, c'est-à-dire l'étude et la caractérisation des mouvements, indépendamment des causes pouvant les créer ou les modifier.

I - Définitions

I.1 - Point matériel

De façon générale, l'objet sur lequel porte l'étude en physique s'appelle le système. La première étape de toute étude consiste donc à définir précisément ce système.

En mécanique du solide, l'objet est un solide indéformable, qui est caractérisé par un certain nombre de grandeurs et de paramètres tels que sa masse m , son centre de gravité G , sa forme, sa position et son orientation dans l'espace.

Définition : Point matériel

Modélisation d'un solide, caractérisé uniquement par

- son centre de gravité G ;
- sa masse m

Un point matériel n'a donc ni taille, ni forme : la mécanique du point permet d'étudier et de prédire l'évolution de la position du centre de gravité d'un solide mais elle ne permet pas de décrire son orientation dans l'espace ni ses mouvements de rotation.

I.2 - Référentiel

En mécanique classique, un mouvement est toujours relatif : il n'existe pas de mouvement « absolu ». La notion de référentiel permet de préciser ce qui sera considéré comme immobile. Il est donc indispensable de définir le référentiel d'étude après avoir défini le système.

Définition : Référentiel

Ensemble de points rigidement liés les uns aux autres, auxquels on associe une horloge.

Remarques :

- Un référentiel est classiquement noté $(\mathcal{R})$.
- La notion de référentiel permet de définir ce qui est considéré comme immobile et, par conséquent, par rapport à quoi le système étudié se déplace.
- Dans le cadre de la mécanique classique ou newtonienne, le temps est absolu (*ie* il s'écoule de manière identique dans tous les référentiels), l'espace est en trois dimensions et le temps et l'espace sont indépendants.
- Un cadre plus général est donné par la mécanique relativiste : temps et espace sont alors liés et le temps n'est plus absolu.
- La mécanique classique constitue un cadre d'étude pertinent tant que la vitesse des objets étudiés reste très inférieure à la vitesse de la lumière : $v \ll c$. Lorsque v devient de l'ordre de $c/10$, les prédictions de la mécanique classique cessent d'être valables.
- On peut citer deux exemples illustrant les limites de la mécanique classique :
 - en astronomie, l'avance de la périhélie de Mercure ;
 - les systèmes de positionnement par satellite (GPS, Galileo,...).

Référentiels classiques

Parmi les référentiels les plus souvent utilisés, on peut citer

- **Référentiel terrestre** : la Terre est considérée comme immobile, on ne prend donc en compte ni son mouvement autour du Soleil, ni sa rotation sur elle-même. Ce référentiel sera adapté à l'étude de mouvements au voisinage de la surface terrestre, sur des distances et des durées relativement courtes.
- **Référentiel géocentrique** : les points fixes du référentiel sont le centre de masse de la Terre et trois étoiles lointaines, permettant de définir trois directions « fixes ». La rotation de la Terre sur elle-même est prise en compte, mais pas son mouvement autour du Soleil. Ce référentiel permet de mieux prendre en compte certains effets non-galiléens que le référentiel terrestre. Il est en particulier utilisé pour l'étude du mouvement des satellites, naturel (la Lune) ou artificiels (cf chapitre OS-F).
- **Référentiel héliocentrique** (ou référentiel de Kepler) : les points fixes du référentiel sont le centre de masse du Soleil et trois étoiles lointaines (identiques au référentiel géocentrique). La rotation de la Terre autour du Soleil et sur elle-même sont prises en compte. Ce référentiel est adapté à l'étude des objets se déplaçant dans le système solaire (planètes, comètes, sondes spatiales,...).
- **Référentiel de Copernic** : les points fixes du référentiel sont le centre de masse du système solaire et trois étoiles lointaines (les mêmes que pour les référentiels géocentrique et héliocentrique). La masse du Soleil représentant environ 99,86 % de la masse du système solaire, ce référentiel est très proche du référentiel héliocentrique.

I.3 - Repère spatio-temporel

Afin de se repérer dans l'espace et le temps, on associe au référentiel d'étude ($\mathcal{R}$) un repère spatio-temporel qui lui est **lié**.

Définition : Repère spatio-temporel

Système de référence permettant de repérer la position d'un point dans l'espace et le temps à l'aide de coordonnées numériques.

- repère spatial : constitué d'une origine et de trois axes orientés, fixes dans ($\mathcal{R}$) : $(Oxyz)$;
- repère temporel : constitué de l'origine des temps (*ie* instant $t = 0$).

Remarques :

- En physique, les repères $(Oxyz)$ seront toujours **orthonormés directs**.
- Un référentiel est une notion physique, un repère une notion mathématique.
- Dans un référentiel ($\mathcal{R}$) donné, il existe une infinité de repères possibles.
- Le mouvement d'un point ne dépend que du référentiel ($\mathcal{R}$), seule son *expression mathématique* dépend du repère choisi.
- Si le repère d'étude n'est pas donné dans l'énoncé d'un exercice ou d'un problème, il est nécessaire de le choisir judicieusement et de le définir explicitement.

II - Mouvement d'un point

Dans toute cette partie, nous nous placerons dans un référentiel ($\mathcal{R}$) donné.

II.1 - Position

On considère ici un point matériel caractérisé par sa position M et sa masse m . Si le point est en mouvement dans ($\mathcal{R}$), sa position n'est pas constante et dépend du temps : on la note alors $M(t)$.

On peut choisir un point O **fixe** dans ($\mathcal{R}$), en pratique ce point sera systématiquement choisi comme l'origine du repère d'étude. On peut alors définir

Définition : Vecteur position

Remarques :

- la distance entre O et M est définie par $OM = \|\vec{OM}\|$.
- OM et toutes les composantes de $\vec{OM}$ sont homogènes à une longueur (L) et s'expriment en m.

II.2 - Vitesse

Soit un point matériel en mouvement dans $(\mathcal{R})$: à un instant t il se situe au point M et il est en M' à un instant ultérieur t' .

Vecteur déplacement

On peut alors définir le vecteur déplacement entre t et t' par

Si $t' \rightarrow t$ (ou $t' = t + dt$ avec $dt \rightarrow 0$), alors $M' \rightarrow M$ et le déplacement devient *infinitésimal* ou *élémentaire*. On écrit alors

On définit alors la vitesse instantanée du point M à l'instant t comme le déplacement infinitésimal par unité de temps :

$$\vec{v} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

Mathématiquement, elle correspond à la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Définition : Vecteur vitesse

Remarques :

- La vitesse d'un point matériel est un *vecteur* : elle est caractérisée par sa norme (*ie* valeur de la vitesse), sa direction et son sens.
- La dimension d'une vitesse (norme $v = \|\vec{v}\|$ et toutes ses composantes) est $L \cdot T^{-1}$ et s'exprime en m s^{-1} . Une autre unité usuelle est le km/h , on retiendra $1 \text{ m s}^{-1} = 3,6 \text{ km h}^{-1}$.
- Si on a précisé au départ le référentiel d'étude et qu'il n'y a aucune ambiguïté par la suite, on pourra l'omettre par la suite et écrire $\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt}$.
- Il est incorrect de parler du signe de la vitesse : soit il s'agit du *vecteur* vitesse et cela n'a aucun sens, soit de la *valeur* et elle est toujours positive ($v = \|\vec{v}\| \geq 0$). En revanche les *composantes* du vecteur vitesse dans un repère donné sont des grandeurs algébriques et peuvent être négatives.
- Sur un intervalle de temps non infinitésimal Δt , pendant lequel l'objet passe de la position M_1 à la position M_2 , on peut définir la vitesse moyenne

$$\vec{v}_{M,\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t}$$

Pour un mouvement à vitesse constante ($\vec{v} = \overrightarrow{cste}$), on peut assimiler vitesse instantanée et vitesse moyenne et écrire $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{\text{moy}}$.

II.3 - Accélération

L'accélération est la variation de la vitesse par unité de temps. On définit donc

Définition : Vecteur accélération



Remarques :

- L'accélération d'un point matériel est un *vecteur* : elle est caractérisée par sa norme (*ie* valeur de l'accélération), sa direction et son sens.
- La dimension d'une accélération (norme $a = \|\vec{v}\|$ et toutes ses composantes) est $L \cdot T^{-2}$ et s'exprime en $m s^{-2}$.
- Une valeur importante à connaître est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g \approx 9,81 m s^{-2}$.
- si on a précisé au départ le référentiel d'étude et qu'il n'y a aucune ambiguïté par la suite, on pourra l'omettre par la suite et écrire $\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$.
- Il est incorrect de parler du signe de l'accélération : soit il s'agit du *vecteur* accélération et cela n'a aucun sens, soit de la *valeur* et elle est toujours positive ($a = \|\vec{a}\| \geq 0$). En revanche les *composantes* du vecteur accélération dans un repère donné sont des grandeurs algébriques et peuvent être négatives.

II.4 - Caractérisation d'un mouvement

Trajectoire

Définition : Trajectoire

Ensemble des points $M(t)$ occupés par l'objet au cours du temps.

Remarques :

- Il s'agit donc d'une courbe *paramétrique* dans l'espace. On perd ainsi toute informations temporelle sur le mouvement : on ne sait plus à quel instant l'objet est passé par un point donné, ni quelle était sa vitesse en ce point.
- La trajectoire est en général orientée, ce qui permet de connaître le sens du déplacement au cours du temps.
- Si l'on parvient à éliminer le paramètre temporel, on peut identifier la trajectoire à l'équation de la courbe. Par exemple, pour un mouvement plan dans (Oxy) , la trajectoire pourra être donnée par la fonction $y = f(x)$ (ou $x = g(y)$).
- Lorsqu'on reconnaît une courbe « classique », on lui donne son nom : trajectoire rectiligne, circulaire, parabolique, elliptique, cycloïdale, ...

Relation avec la vitesse et l'accélération

Variation de la vitesse

On s'intéresse ici à la variation de la *valeur* de la vitesse en fonction du temps :

- ☐ Si la vitesse *augmente*, le mouvement est accélééré ;
- ☐ Si la vitesse *diminue*, le mouvement est retardé (on dit aussi ralenti ou décélééré) ;
- ☐ Si la vitesse *reste constante*, le mouvement est uniforme.



Remarque préliminaire importante :

$\vec{a} = \vec{0}$ signifie que le **vecteur** vitesse est constant : en norme, direction et sens.

$$v = \text{cste} \iff \vec{a} = \vec{0}$$

Relation vitesse – accélération

Par définition $v^2 = \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2$.

- ☐ mvt accéléré
- ☐ mvt décélééré
- ☐ mvt uniforme

Remarque : pour que le mouvement soit uniforme, il faut que $\vec{a} \perp \vec{v}$ sur un intervalle de temps non nul. Si ce n'est vrai qu'à un instant t_0 isolé, cela signifie simplement que la vitesse v est extrémale (maximum ou minimum) à cet instant.

III - Systèmes de coordonnées

En mécanique classique, on travaille dans un espace euclidien à trois dimensions. L'espace est repéré par un repère défini par une origine O et trois axes orientés, formant un repère $(Oxyz)$. Dans un repère donné, on peut dire que, de façon générale, un point M est repéré par **trois** coordonnées :

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

L'espace est également associé à un **trièdre** de vecteurs de base

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad \text{ou} \quad (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

Comme indiqué précédemment, les repères utilisés seront toujours orthonormés directs, il en est donc de même pour les trièdres de base : les vecteurs de base sont perpendiculaires deux à deux, de norme un et leur ordre

respecte la « règle de la main droite ».

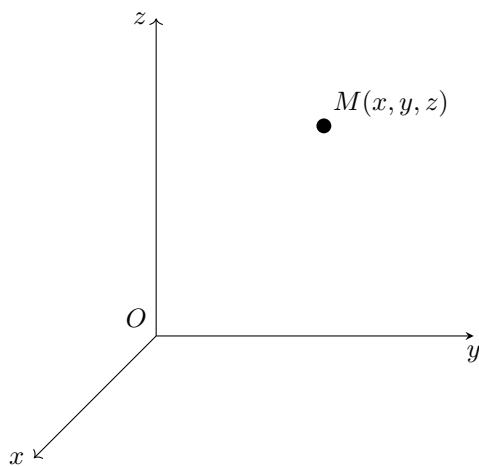
De même, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne dépendent que du référentiel d'étude : ils sont indépendants du repère et du système de coordonnées choisis. Seule leur expression (*ie* leurs coordonnées ou composantes) dépend du système de coordonnées¹.

III.1 - Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, et dans un repère $(Oxyz)$, les coordonnées d'un point M sont (x, y, z) et le trièdre de base est $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ou $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Remarque : pour éviter toute confusion d'homogénéité, l'écriture $\vec{x}$ ou $\vec{X}$ est **à proscrire** en physique.

Définition : Coordonnées cartésiennes



Les vecteurs de base sont colinéaires aux axes, et orientés dans le même sens.

On définit les points suivants :

- H : projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) ;
- M_x, M_y, M_z : projetés orthogonaux de M sur les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) .

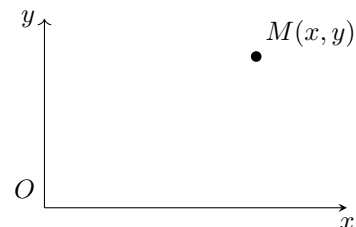
Les coordonnées sont les longueurs *algébriques* entre l'origine O et les projetés orthogonaux :

Remarques :

- Les vecteurs de base sont liés aux axes, indépendants du point M . Ils sont donc immobiles et restent constants dans le temps ($\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \vec{0}$, idem pour $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$), on parle de *base fixe*.
- La direction de $\vec{u}_x$ est la direction du déplacement du point M si seule la coordonnée x varie, et son sens est celui du mouvement lorsque x augmente (idem pour $\vec{u}_y$ avec y et $\vec{u}_z$ avec z).

Dans le cas (fréquent) d'un mouvement plan, par

- exemple dans (Oxy) , on a $M \equiv H$ et l'étude se ramène à un graphe en 2D :



Vecteur position

En appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_xH} + \overrightarrow{OM_z} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$$

Propriété : Vecteur position

1. À l'exception du vecteur position qui dépend évidemment du point O , fixe mais arbitraire dans le référentiel

Vecteur déplacement

Si l'on passe d'un point $M(x, y, z)$ à un point $M'(x', y', z')$, le vecteur déplacement est

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{u}_x + (y' - y)\vec{u}_y + (z' - z)\vec{u}_z$$

Pour un déplacement infinitésimal, $M' \rightarrow M$, $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, on peut alors écrire

Propriété : Vecteur déplacement élémentaire

Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est défini par

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)$$

On utilise fréquemment la notation $\frac{df}{dt} = \dot{f}$ pour une dérivée *temporelle*).

Propriété : Vecteur vitesse

Remarques :

— Les composantes du vecteur vitesse sont donc

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$

— La *valeur* de la vitesse est donnée par

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini par

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z)$$

Propriété : Vecteur accélération

Remarques :

— Les composantes du vecteur accélération sont donc

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$$

— La *valeur* de l'accélération est donnée par

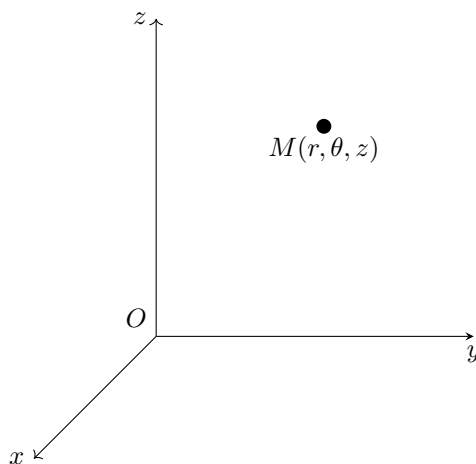
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Pour conclure, les coordonnées cartésiennes constituent le système le plus simple à manipuler. On les utilise lorsqu'aucune information préalable ne suggère un autre choix, ou lorsqu'aucune symétrie particulière ne simplifie le problème. En particulier, elles sont parfaitement adaptées à l'étude d'un **mouvement rectiligne** : on choisit alors systématiquement un axe du repère (souvent (Ox)) comme axe du mouvement.

III.2 - Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, et dans un repère $(Oxyz)$, les coordonnées d'un point M sont (r, θ, z) et le trièdre de base est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ou $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Définition : Coordonnées cylindriques



On définit les points suivants :

- H : projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) ;
- M_z : projeté orthogonal de M sur (Oz) .

Les coordonnées sont définies par

- r est la distance entre O et H ;
- θ est l'angle orienté entre (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{OH}$;
- z est la distance *algébrique* entre O et M_z .

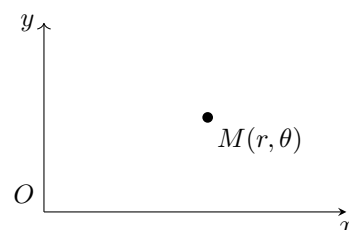
Le vecteurs du trièdre de base sont définis par

- $\vec{e}_r$ est colinéaire à $\overrightarrow{OH}$ (ou $\overrightarrow{M_zM}$), orienté dans le même sens ;
- $\vec{e}_z$ est colinéaire à (Oz) , orienté dans le même sens ;
- $\vec{e}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$, orienté de sorte que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit direct.

Remarques :

- On a toujours $r \geq 0$ et $-\pi < \theta \leq \pi$.
- La coordonnée z et le vecteur $\vec{e}_z$ sont identiques à ceux des coordonnées cartésiennes.
- Les vecteurs de base sont liés au point M , ils tournent lorsque M se déplace. On parle de *base mobile* et on aura $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \neq \vec{0}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \neq \vec{0}$ (on verra qu'ils ne dépendent en fait que de θ , pas de r ou z). En revanche, on a toujours $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$.
- La direction de $\vec{e}_r$ est la direction du déplacement du point M si seule la coordonnée r varie, et son sens est celui du mouvement lorsque r augmente (idem pour $\vec{e}_\theta$ avec θ et $\vec{e}_z$ avec z).

Dans le cas (fréquent) d'un mouvement plan, par exemple dans (Oxy) , on a alors $M \equiv H$ et l'on se ramène à un graphe en 2D et aux coordonnées polaires $M(r, \theta)$.



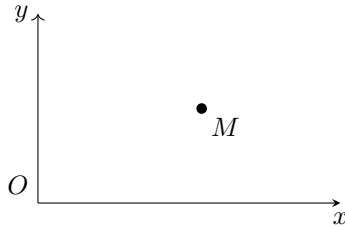
Passage cylindrique-cartésienne

Il existe des relations permettant de passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes et réciproquement. La coordonnée z étant commune aux deux systèmes, on peut se placer dans le plan (Oxy) et

travailler avec les coordonnées polaires.

Passage polaire $\rightarrow$ cartésien

☐ Coordonnées



☐ Vecteurs de base

Vecteur position

En appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OM_z}$$

Propriété : Vecteur position



Remarque : θ n'apparaît pas *explicitement* dans l'expression du vecteur position, mais elle intervient *indirectement* à travers $\vec{e}_r$.

Vecteur déplacement

Si l'on passe d'un point $M(r, \theta, z)$ à un point $M'(r', \theta', z')$, le vecteur déplacement est $\overrightarrow{MM'}$.

Pour un déplacement infinitésimal, $M' \rightarrow M$, $r' = r + dr$, $\theta' = \theta + d\theta$, $z' = z + dz$, le déplacement peut être décomposé en trois étapes :

- r varie de dr : déplacement de dr dans la direction $\vec{e}_r$;
- θ varie de $d\theta$: déplacement le long d'un arc $d\theta$ sur un cercle de rayon r , soit $r d\theta$ dans la direction $\vec{e}_\theta$;
- z varie de dz : déplacement de dz dans la direction $\vec{e}_z$.

Propriété : Vecteur déplacement élémentaire



Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est défini par

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

Expressions de $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ ne dépendent que de θ , on peut utiliser une composition de fonctions pour écrire

Les relations de passage entre coordonnées polaires et cartésiennes permettent alors d'exprimer $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$:

Au final

Propriété : Vecteur vitesse

Remarques :

- Les composantes du vecteur vitesse sont donc

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$$

On peut noter que $v_\theta \neq \frac{d\theta}{dt}$.

- La *valeur* de la vitesse est donnée par

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

- L'expression de $\vec{v}$ peut être retrouvée à partir du déplacement élémentaire, en le *divisant* par l'intervalle de temps dt :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$$

- L'expression $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$ n'est pas homogène et donc totalement dépourvue de sens.

Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini par

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta} \vec{e}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \vec{e}_r) + \ddot{z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Propriété : Vecteur accélération

Remarques :

- Les composantes du vecteur accélération sont donc

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_z \vec{e}_z$$

On peut noter que $a_r \neq \frac{dv_r}{dt}$ et $a_\theta \neq \frac{dv_\theta}{dt}$.

- La *valeur* de l'accélération est donnée par

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

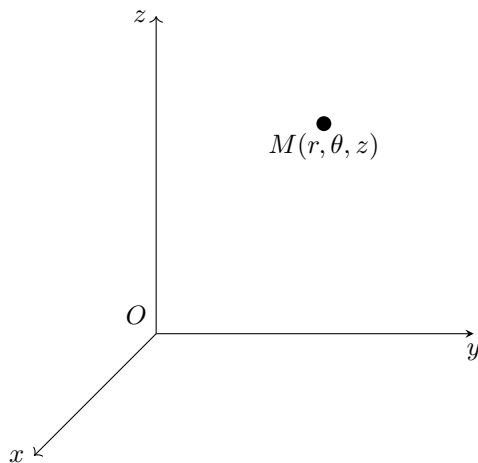
Pour conclure, la présence d'une base mobile rend les coordonnées cylindriques plus délicates à manipuler que les coordonnées cartésiennes. On les utilise lorsqu'elles exploitent une symétrie naturelle du problème, en particulier lorsqu'un axe de symétrie (qui sera systématiquement choisi comme étant (Oz)) est présent. Elles sont notamment très adaptées à l'étude des **mouvements circulaires**.

III.3 - Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, et dans un repère $(Oxyz)$, les coordonnées d'un point M sont (r, θ, φ) et le trièdre de base est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ ou $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Ils sont définis comme suit :

Définition : Coordonnées sphériques



On définit les points suivants :

- H : projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) ;

Les coordonnées sont définies par

- r est la distance entre O et M ;
- la *colatitude* θ est l'angle orienté entre (Oz) et le vecteur $\vec{OM}$;
- la *longitude* φ est l'angle orienté entre (Ox) et le vecteur $\vec{OH}$;

Le vecteurs du trièdre de base sont définis par

- $\vec{e}_r$ est colinéaire à $\vec{OM}$, orienté dans le même sens ;
- $\vec{e}_\theta$ est contenu dans le plan (OzM) , perpendiculaire à $\vec{e}_r$ et orienté dans le sens des θ croissants ;
- $\vec{e}_\varphi$ est perpendiculaire à $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, orienté de sorte que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit direct.

Remarques :

- On a toujours $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-\pi < \varphi \leq \pi$.
- La coordonnées r et le vecteur $\vec{e}_r$ **ne sont pas** ceux des coordonnées cylindriques (on les note parfois ρ et $\vec{e}_\rho$ en coordonnées sphériques pour éviter la confusion).

- La coordonnées θ et le vecteur $\vec{e}_\theta$ **ne sont pas** ceux des coordonnées cylindriques : la coordonnée φ en sphérique est la coordonnée θ en cylindrique (idem pour les vecteurs associés $\vec{e}_\varphi$ en sphérique et $\vec{e}_\theta$ en cylindrique).
- Les vecteurs de base sont liés au point M , ils tournent lorsque M se déplace : on a également une *base mobile* et on aura $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \neq \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \neq \vec{0}$ et $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \neq \vec{0}$ (on constatera qu'ils ne dépendent pas de r mais de θ et φ).
- La direction de $\vec{e}_r$ est la direction du déplacement du point M si seule la coordonnée r varie, et son sens est celui du mouvement lorsque r augmente (idem pour $\vec{e}_\theta$ avec θ et $\vec{e}_\varphi$ avec φ).

Passage coordonnées sphériques–cartésiennes

On note d'abord que r est la distance OM , d'où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le passage complet entre coordonnées cartésiennes et sphériques, ainsi que l'expression des vecteurs de base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction de $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, nécessitent des calculs plus avancés et ne sont pas au programme. On se limitera aux expressions utiles pour la position, le déplacement élémentaire et la vitesse.

On pourra tout de même noter que, en revenant aux points définis en coordonnées cartésiennes et cylindriques M_z est le projeté orthogonal de M sur (Oz) avec un angle θ , H est le projeté de M sur (Oxy) avec un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$, puis M_x et M_y les projetés de H sur (Ox) et (Oy) , avec des angles φ et $\frac{\pi}{2} - \varphi$, on aura

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{cases}$$

Vecteur position

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est de norme r , colinéaire à $\vec{e}_r$ et orienté dans le même sens. On a donc directement

Propriété : Vecteur position



Remarque : les coordonnées θ et φ n'apparaissent pas *explicitement* dans l'expression du vecteur position, mais elles interviennent *indirectement* à travers $\vec{e}_r$.

Vecteur déplacement

Si on passe d'un point $M(r, \theta, z)$ à un point $M'(r', \theta', z')$, le vecteur déplacement est $\overrightarrow{MM'}$.

Pour un déplacement infinitésimal, $M' \rightarrow M$, $r' = r + dr$, $\theta' = \theta + d\theta$, $\varphi' = \varphi + d\varphi$, le déplacement peut être décomposé en trois étapes :

- r varie de dr : déplacement de dr dans la direction $\vec{e}_r$;
- θ varie de $d\theta$: déplacement le long d'un arc $d\theta$ sur un cercle de rayon r , soit $r d\theta$ dans la direction $\vec{e}_\theta$;
- φ varie de $d\varphi$: déplacement le long d'un arc $d\varphi$ sur un cercle de rayon $r \sin \theta$, soit $r \sin \theta d\varphi$ dans la direction $\vec{e}_\varphi$.

Propriété : Vecteur déplacement élémentaire



Vecteur vitesse

Le calcul du vecteur vitesse à partir de sa définition,

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

nécessiterait la dérivation de $\vec{e}_r$ et n'est pas au programme. On peut cependant, comme en coordonnées cylindriques, obtenir $\vec{v}$ à partir du déplacement élémentaire, en le *divisant* par l'intervalle de temps dt :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi}{dt}$$

Propriété : Vecteur vitesse

Remarques :

- Les composantes du vecteur vitesse sont donc

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = r \sin \theta \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

On peut noter que $v_\theta \neq \frac{d\theta}{dt}$ et $v_\varphi \neq \frac{d\varphi}{dt}$.

- La *valeur* de la vitesse est donnée par

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r \sin \theta \dot{\varphi})^2}$$

Vecteur accélération

L'expression du vecteur accélération ne peut être obtenue que par le calcul de la dérivée de $\vec{v}$, ce qui nécessite notamment la dérivation des vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$. Ce calcul n'est pas au programme et n'est donc pas exigible. À titre indicatif, on obtiendrait :

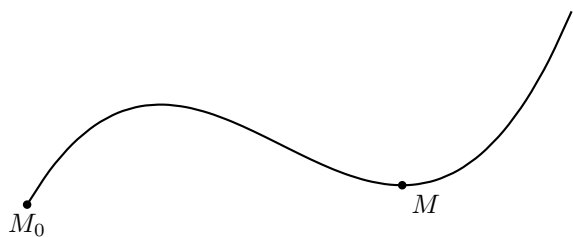
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \vec{e}_\varphi$$

III.4 - Repère de Frenet

Le repère de Frenet est un repère directement lié à la trajectoire. Il est donc nécessaire de connaître celle-ci pour pouvoir l'utiliser. En PTSI, on se limitera à l'étude du repère de Frenet dans le cas d'un mouvement **plan**.

La trajectoire étant connue, le point M se déplace sur une courbe à une dimension : une seule coordonnée d'espace suffit donc à le repérer. Dans le repère de Frenet, cette coordonnée est l'abscisse curviligne s et les vecteurs de base sont le vecteur tangent $\vec{e}_T$ et le vecteur normal $\vec{e}_N$ ^{2 3}

Définition : Repère de Frenet



L'abscisse curviligne $s(t)$ est la distance parcourue par le point entre sa position initiale M_0 l'instant $t = 0$ et $M(t)$ à l'instant t , **mesurée le long de la trajectoire**.

Les vecteurs de base sont

- vecteur tangent $\vec{e}_T$: tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement ;
- vecteur normal $\vec{e}_N$: perpendiculaire à la trajectoire, orienté vers l'intérieur de la courbure.

2. On rencontrera également fréquemment les notations $\vec{T}$ et $\vec{N}$, qui ont l'inconvénient de ne pas indiquer explicitement qu'il s'agit de vecteurs unitaires.

3. Dans le cas d'un mouvement non plan, on ajoute un troisième vecteur de base, le vecteur binormal $\vec{e}_B$, de sorte que le trièdre $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B)$ soit orthonormé direct.

Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est toujours défini par $v = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{\vec{MM'}}{dt}$. Il est tangent à la trajectoire et on en déduit

Propriété : Vecteur vitesse



Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini par

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\vec{e}_T)}{dt} = \ddot{s}\vec{e}_T + \dot{s}\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \ddot{s}\vec{e}_T + \dot{s}\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{e}_T}{ds} = \ddot{s}\vec{e}_T + \dot{s}^2\frac{d\vec{e}_T}{ds}$$

Dérivée d'un vecteur unitaire

Soit $\vec{u}(s)$ un vecteur unitaire, on a alors $\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u})^2 = 1 = \text{cste}$ et donc

La dérivée de $\vec{e}_T$ est donc perpendiculaire à $\vec{e}_T$. $\vec{e}_T$ tournant dans le même sens que la trajectoire, sa dérivée est orientée vers l'intérieur de la courbure et finalement $\frac{d\vec{e}_T}{ds}$ est colinéaire de même sens que $\vec{e}_N$.

On peut alors écrire $\frac{d\vec{e}_T}{ds} = \frac{1}{R}\vec{e}_N$ avec $R > 0$.

Propriété : Vecteur accélération



- ☐ $a_T = \ddot{s} = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$ est l'accélération tangentielle ;
- ☐ $a_N = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{v^2}{R}$ est l'accélération normale ;
- ☐ R est le rayon de courbure.

Remarques :

- Une analyse dimensionnelle permet de vérifier que R est homogène à une longueur : $[R] = \text{L}$.
- a_T peut être positif (mouvement accéléré) ou négatif (mouvement retardé). En revanche a_N est toujours positif : on parle d'accélération centripète.
- Le rayon de courbure R est le rayon du cercle *osculateur* c'est-à-dire le cercle qui approche le mieux la trajectoire au voisinage de M . Le centre de courbure C est alors le centre de ce cercle. Dans le cas général, C et R ne sont pas fixes : ils dépendent du point M , et donc de t .

IV - Exemples de mouvement

Principe de résolution

Pour un point matériel M dans un référentiel $(\mathcal{R})$ donné, si l'on connaît son accélération en tout instant $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t)$ ainsi que les conditions initiales

- position initiale : $\vec{OM}(t=0) = \vec{OM}_0$;
- vitesse initiale : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t=0) = \vec{v}_0$

alors il est possible de déterminer la position et la vitesse à tout instant, et donc connaître la nature de sa trajectoire et de son mouvement.

En effet si on connaît $\vec{OM}(t)$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)$ à un instant t quelconque, leurs valeurs à l'instant $t + dt$ s'obtiennent par

$$\begin{cases} \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t + dt) = \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) + \vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) dt \\ \vec{OM}(t + dt) = \vec{OM}(t) + \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) dt \end{cases}$$

Deux approches sont alors possibles :

- résolution **analytique**, *exacte* : on intègre deux fois l'accélération pour obtenir successivement la vitesse puis la position ;
- résolution **numérique** : on construit une solution *approchée* en appliquant itérativement les relations précédentes (méthode d'Euler explicite, qui sera vue en TP, par exemple).