

MI – Chapitre D

Mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique

I - Force de Lorentz

I.1 - Définition

Lorsqu'une particule de charge q se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, elle subit la force de Lorentz :

Loi : Force de Lorentz



qui se décompose en

- ☐ composante électrique $\vec{F}_e = q \vec{E}$;
- ☐ composante magnétique $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$.

Remarques :

- ☐ L'unité standard du champ électrique est le volt par mètre ($[E] = \text{V m}^{-1}$) ;
- ☐ L'unité standard du champ magnétique est le Tesla ($[B] = \text{T}$) ;
- ☐ Les champs électrique et magnétique ne sont qu'une vision relative (charge fixe ou en mouvement) de la même réalité physique : ils sont intimement liés l'un à l'autre, c'est pour cela qu'on parle de champ électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$).

I.2 - Aspect énergétique

Travail de la force magnétique

Propriété : La force magnétique ne travaille pas

Comme $\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{v}$, son travail élémentaire est



La force magnétique **ne travaille pas**, donc :

- ☐ elle ne peut pas accélérer (ni ralentir) une particule ;
- ☐ elle modifie uniquement la **direction** de la vitesse, pas sa norme ;
- ☐ $\|\vec{v}\| = \text{cste}$ en présence d'un champ magnétique seul.

Travail de la force électrique

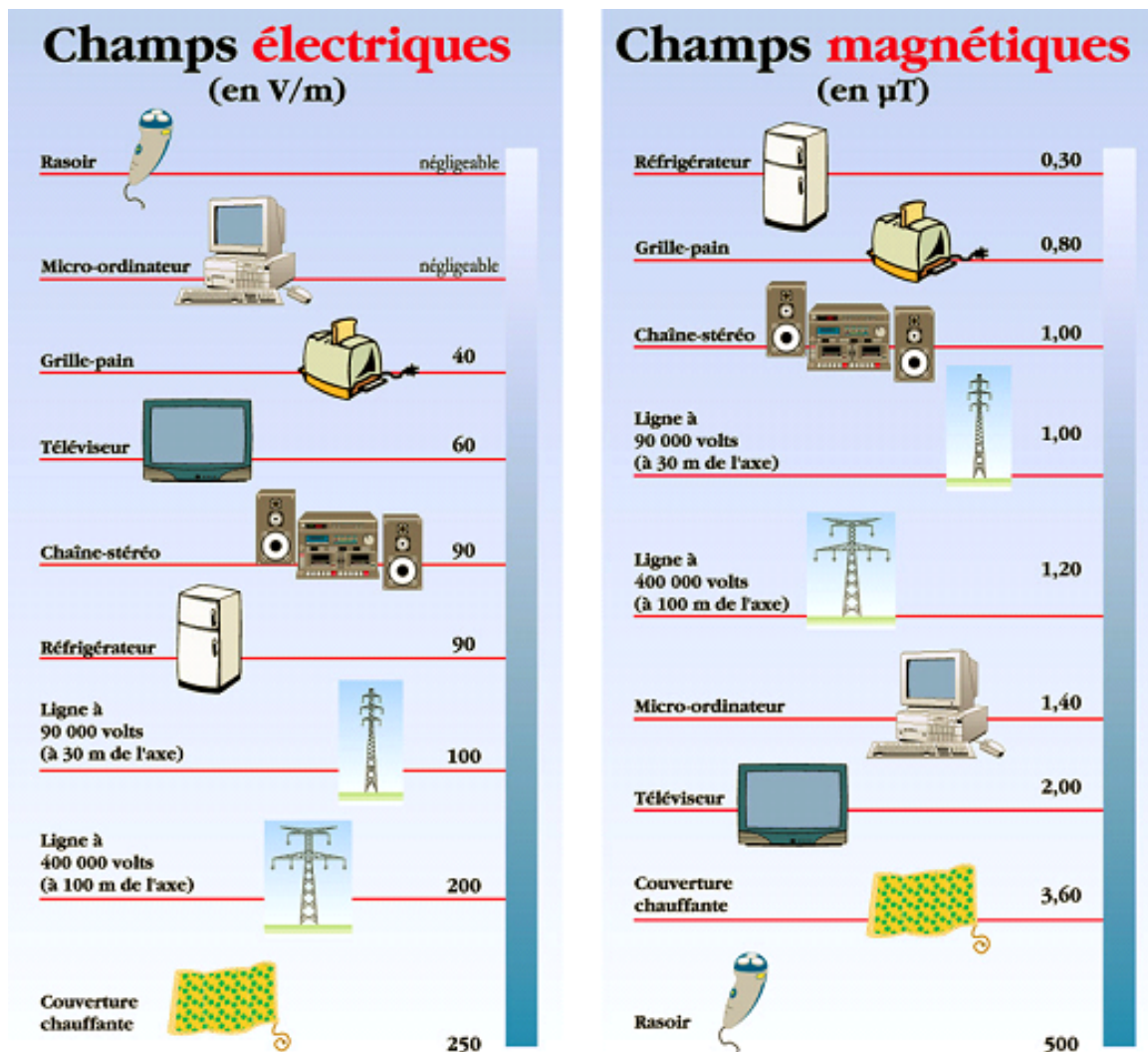
La force électrique $\vec{F}_e = q \vec{E}$ dérive d'une énergie potentielle, on a donc $\vec{F}_e = q \vec{E} = -\vec{\text{grad}} E_{pL}$. Par ailleurs, la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique V est $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$. On en déduit l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de Lorentz :

Loi : Énergie potentielle électrique

Si la vitesse n'est pas orthogonale au champ électrique, alors la force électrique $\vec{F}_{\text{él}} = q\vec{E}$ a une puissance non-nulle. Compte tenu du théorème de la puissance cinétique, cela signifie qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée.

I.3 - Ordres de grandeur

On donne ci-dessous des exemples d'ordre de grandeur pour les champs électrique et magnétique :



On retiendra également :

- champ magnétique terrestre : 50 µT.
- champ électrique atmosphérique dans une atmosphère calme : 100 V m⁻¹.
- champ électrique atmosphérique dans une zone orageuse : jusqu'à 20 000 V m⁻¹.

Application : Comparaison des forces électrique et gravitationnelle dans l'atome d'hydrogène

On considère un atome d'hydrogène : un proton (masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, charge $+e$) et un électron (masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, charge $-e$) séparés d'une distance $r = 10^{-10}$ m (taille de l'atome). On se place dans le cas $\vec{B} = \vec{0}$.

La force électrique entre les deux charges vaut

La force gravitationnelle vaut

Application numérique :

Application : Comparaison des forces électrique et de la pesanteur pour un électron

On considère un électron se déplaçant dans un champ électrique $E = 1 \text{ V m}^{-1}$.

La force électrique subie par l'électron est

Le poids de l'électron est

Application numérique :

Remarques :

- De façon générale, dès que des interactions électromagnétiques interviennent, on négligera l'interaction gravitationnelle sur le mouvement des particules.
- Pour des particules très énergétiques, v peut se rapprocher de $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Le traitement classique n'est alors plus valide et il faut recourir à la mécanique relativiste. En PTSI, on reste en mécanique classique, ce qui est légitime si $v \ll c$ (typiquement $v \lesssim c/10$).

II - Mouvement dans un champ électrostatique uniforme et stationnaire

II.1 - Mise en situation

On considère un champ électrique uniforme et stationnaire :

- **uniforme** : $\vec{E}$ indépendant de la position ;
- **stationnaire** : $\vec{E}$ indépendant du temps.

La deuxième loi de Newton appliquée à la particule (en l'absence de champ magnétique) donne :

$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

Loi : Mouvement dans un champ électrostatique uniforme



Le vecteur accélération est **constant** : c'est un mouvement à vecteur accélération constant (cf MI-A).

II.2 - Équations du mouvement et nature de la trajectoire

On note $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$ (le champ est selon $\vec{e}_z$, orienté dans le même sens) et on se donne les conditions initiales :

- $\vec{v}(0) = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0z} \vec{e}_z$;
- $\vec{OM}(0) = \vec{0}$.

L'intégration de l'accélération $\vec{a} = \frac{q}{m} E_0 \vec{e}_z$ puis de la vitesse donnent

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_z = \frac{qE_0}{m} t + v_{0z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ z(t) = \frac{qE_0}{2m} t^2 + v_{0z} t \end{cases}$$

On retrouve la trajectoire vue au chapitre MI-A pour un mouvement à vecteur accélération constant :

- si $vecv_0 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_0 // \vec{E}$: trajectoire rectiligne ;
- cas général : trajectoire parabolique.

II.3 - Aspect énergétique

Il est souvent plus rapide, lorsque seule la force de Lorentz intervient, de passer par un raisonnement énergétique pour déterminer la vitesse d'une particule.

Conservation de l'énergie mécanique

La force de Lorentz étant conservative, l'énergie mécanique se conserve et on peut écrire

Ainsi, en prenant deux points A et B sur la trajectoire, on aura

Accélérateur linéaire

Un accélérateur linéaire est un dispositif permettant de communiquer des vitesses élevées à des charges électriques en les soumettant à une différence de potentiel importante. On peut citer deux grandes catégories d'utilisation :

- la production de rayonnements (lorsqu'une charge électrique est accélérée, elle produit un rayonnement électromagnétique) dans les domaines médical (radiographie X), industriel (contrôle non destructif, stérilisation) ou de la recherche,
- les collisions à très hautes vitesses de particules pour la recherche fondamentale en physique des hautes énergies.

Exercice : Bilan énergétique et détermination de la vitesse dans un accélérateur linéaire

Une charge q négative (un électron par exemple), initialement au repos, est placée dans un champ électrique uniforme et stationnaire colinéaire à (Ox) . On caractérise le champ électrique par la différence de potentiel U qu'il crée entre les deux points d'abscisses $x = d > 0$ et $x = 0$: on a $U = V(d) - V(0)$.

1. La charge est initialement placée en une position quelconque x_0 telle que $0 < x_0 < d$. Comment doit-on choisir U pour que la charge soit accélérée vers les x croissants ? Comment est alors orienté le champ électrique ?
2. On place la charge en $x = 0$, sans vitesse initiale, et on suppose que la charge est accélérée dans le sens des x croissants. Par application du théorème de l'énergie mécanique (la force de Lorentz est conservative), et grâce à la relation entre énergie potentielle et potentiel électrostatique, déterminer l'énergie cinétique de la charge quand elle arrive en $x = d$, en fonction de q et U . Quelle est alors sa vitesse ?
3. Application numérique : dans les conditions précédentes, déterminer les valeurs de l'énergie cinétique et de la vitesse en $x = d$, dans le cas d'un électron pour $|U| = 1 \text{ V}$ puis $|U| = 1 \text{ kV}$.

III - Mouvement dans un champ magnétique uniforme et stationnaire

III.1 - Mise en situation

On considère un champ magnétique uniforme et stationnaire :

- **uniforme** : $\vec{B}$ indépendant de la position ;
- **stationnaire** : $\vec{B}$ indépendant du temps.

La deuxième loi de Newton appliquée à la particule (en l'absence de champ électrique) donne :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Remarque : la force magnétique de Lorentz ne travaillant pas, un raisonnement énergétique n'aboutira pas, il est nécessaire de passer par la RFD.

III.2 - Mise en équation

On choisit un repère cartésien de façon que $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

Équations du mouvement

On applique la RFD $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ en on projète les trois axes :

Une analyse dimensionnelle de l'expression précédente montre que la quantité $\frac{qB_0}{m}$ est homogène à T^{-1} . On définit alors

Définition : Pulsation cyclotron

On définit la pulsation cyclotron ω_c par :



ω_c s'exprime en rad s^{-1} .

Pour la suite, nous nous intéresserons uniquement au cas particulier où la vitesse initiale $\vec{v}_0$ est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$

Cas particulier : $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$

On a alors $v_{0z} = 0$ et, comme $\frac{dv_z}{dt} = 0$, $v_z(t) = 0 \forall t$: le mouvement est plan dans le plan (xOy) , perpendiculaire à $\vec{B}$.

En posant $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ (pulsation cyclotron **algébrique**), le mouvement est régi par un système de deux équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \end{cases}$$

Équations horaires

En dérivant la première équation et en substituant la seconde :

Remarque : on retrouve bien que le mouvement est uniforme :

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 (\cos^2(\omega_c t + \varphi) + \sin^2(\omega_c t + \varphi))} = v_0 = \text{cte}$$

Trajectoire

On intègre les expressions de v_x et v_y :

Loi : Mouvement circulaire uniforme dans le cas $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$

Lorsque $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, le mouvement est un mouvement circulaire uniforme de rayon :



Remarques :

- on définit également la période cyclotron $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{|q|B_0}$;
- ω_c et T_c ne dépendent pas de la vitesse v_0 de la particule ;
- le sens dans lequel est parcourue la trajectoire dépend du sens de $\vec{B}$ et $\vec{v}_0$, ainsi que du signe de q .

Application : Rayon de la trajectoire circulaire

Dans le cas où le vecteur vitesse est perpendiculaire au champ magnétique, par exemple $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ et $\vec{v}_0(v_{0x}, v_{0y})$, et *en admettant* que la trajectoire est circulaire, déterminer le rayon R de la trajectoire de la charge en fonction de B_0 , m , v_0 et q . On utilisera les coordonnées polaires.

Correction : la force de Lorentz magnétique ne travaillant pas, le mouvement est circulaire uniforme.

Vitesse initiale quelconque (hors programme)

Si la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au champ magnétique uniforme et stationnaire, on écrit toujours $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ mais $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y + v_{0z} \vec{e}_z$. La force de Lorentz devient

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qB_0 v_y & -qB_0 v_x & 0 \end{vmatrix}$$

La RFD s'écrit alors :

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qB_0 v_y \\ m\dot{v}_y = -qB_0 v_x \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

On retrouve, en x et y , les mêmes équations couplées que dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire à $\vec{B}$. La trajectoire projetée sur le plan (xOy) sera identique à celle vue précédemment : un cercle de rayon

$$R = \frac{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}}{\omega_c} = \frac{m\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}}{qB_0}.$$

Le mouvement selon z peut se traiter de façon indépendante, on trouve rapidement $v_z(t) = v_{0z}$ et $z(t) = v_{0z}t + z_0$. La particule fait un tour complet en $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$, pendant ce temps $\Delta z = v_{0z}T = \frac{2\pi v_{0z}}{\omega_c}$.

Trajectoire hélicoïdale

La trajectoire est une hélice de rayon

$$R = \frac{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}}{\omega_c} = \frac{m\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}}{qB_0}$$

et de pas

$$H = \frac{2\pi v_{0z}}{\omega_c} = \frac{2\pi m v_{0z}}{qB_0}$$

