MI – Chapitre E

Moment cinétique et théorème du moment cinétique

I - Moment cinétique d'un point matériel

Le moment cinétique est à la rotation ce que la quantité de mouvement est à la translation : c'est la grandeur qui décrit l'état de rotation d'un point matériel.

I.1 - Moment cinétique par rapport à un point

Définition : Moment cinétique par rapport à un point

Soit un point matériel (M, m) animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ et un point O quelconque **fixe** dans $\mathcal{R}$. Le **moment cinétique de M par rapport au point O** est :

Remarques :

- ☐ $\vec{L}_O$ est une grandeur **vectorielle**. Son unité est : $\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$.
- ☐ $\vec{L}_O$ est perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{OM}, \vec{v})$; son sens est donné par la « règle de la main droite » : le trièdre de $(\overrightarrow{OM}, \vec{v}, \vec{L}_O)$ est *direct*.
- ☐ Si l'on change de point de référence de O à O', on a :

$$\vec{L}_{O'} = \overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \wedge m\vec{v} = \vec{L}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{v}$$

Mouvement rectiligne

Propriété : Mouvement rectiligne passant par O

Mouvement rectiligne passant par O

Démonstration

Mouvement rectiligne passant par O

Mouvement plan

Propriété : Mouvement plan contenant par O

Mouvement plan contenant par O

$\iff$ $\vec{L}_O$ est de direction constante, perpendiculaire au plan du mouvement.

Démonstration

Sens direct : si M se déplace dans un plan contenant O (*ie* $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont contenus dans ce plan), alors $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ est perpendiculaire à ce plan : $\vec{L}_O$ est de **direction constante**, perpendiculaire au plan du mouvement.

Sens indirect : $\vec{L}_O$ est de direction constante, on peut choisir (Oz) tel que $\vec{L}_O = L_{Oz}\,\vec{e}_z$ avec $L_{Oz} \neq 0$.

Mouvement circulaire

Moment cinétique en mouvement circulaire

Un point M de masse m décrit un cercle de rayon R d'axe en O, à vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Remarque : Le sens de $\vec{L}_O$ est le même que le sens de rotation (règle de la main droite/du bonhomme d'Ampère/du tire-bouchon de Maxwell).

I.2 - Moment cinétique par rapport à un axe

Définition : Moment cinétique par rapport à un axe

Soit $(\Delta, \vec{e}_\Delta)$ un axe orienté et $O \in (\Delta)$. Le moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) est :

C'est une **grandeur scalaire**, indépendante du choix de O sur (Δ).

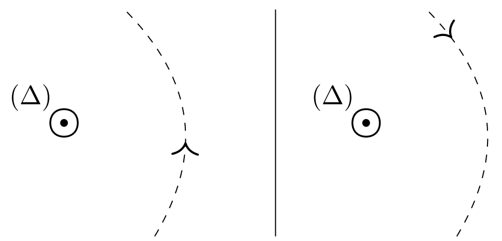
- ☐ L_Δ est une grandeur **scalaire**. Son unité est : kg·m^2·s^{-1}.
- ☐ (Δ) est un axe *orienté* : si on change le sens de l'axe, on inverse le signe de L_Δ.
- ☐ L_Δ est indépendant du point O choisi pour le définir, à condition qu'il appartienne à (Δ).
  Pour un point $O' \in \Delta$,

$$\vec{L}_{O'} \cdot \vec{e}_\Delta = (\overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_\Delta = \left[(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \wedge m\vec{v}\right] \cdot \vec{e}_\Delta = \underbrace{(\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_\Delta}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{O'O} \parallel \vec{e}_\Delta} + (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_\Delta$$

Signe de L_Δ

Le signe de L_Δ donne le sens de rotation autour de (Δ) (règle de la main droite/du bonhomme d'Ampère/du tire-bouchon de Maxwell) :

- — $L_\Delta > 0$: le point M tourne dans le sens direct.
- — $L_\Delta < 0$: le point M tourne dans le sens rétrograde.



Mouvement circulaire autour de l'axe (Oz)

On se place en coordonnées cylindriques :

II - Moment d'une force

II.1 - Moment d'une force par rapport à un point

Considérons une force $\vec{F}$ appliquée en un point matériel M. On cherche à quantifier la capacité de cette force à faire tourner ce point autour d'un point O fixe dans le référentiel d'étude. La quantité pertinente n'est pas la force seule, mais le moment de la force par rapport à O.

Définition : Moment d'une force par rapport à un point

Soit une force $\vec{F}$ appliquée en un point M. Le moment de $\vec{F}$ par rapport au point O est le vecteur défini par :

Remarques :

- ☐ Le moment d'une force par rapport à un point est une grandeur **vectorielle**, son unité est le **N·m**[1]
- ☐ Le moment dépend du **point de calcul** O : si on change de point, le moment change. La formule de changement de point est :
$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$$
- ☐ Si $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{F}})$, alors $\left\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\right\| = F \cdot OM \cdot |\sin\theta|$.
- ☐ Si $\vec{F}$ passe par O, alors $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$.

II.2 - Moment d'une force par rapport à un axe orienté

En mécanique, un solide tourne souvent autour d'un **axe fixe** (Δ) et non autour d'un simple point. On définit donc le moment d'une force par rapport à cet axe.

Définition : Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit un axe orienté $(\Delta, \vec{e}_\Delta)$ et O un point quelconque de (Δ). Le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ) est :

- ☐ C'est une **grandeur scalaire**, indépendante du choix de O sur (Δ).
- ☐ Unité : N·m.

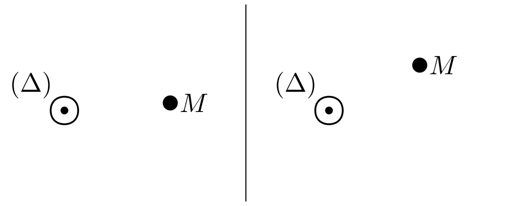
Remarques :

- ☐ Le moment d'une force par rapport à un axe est une grandeur **scalaire**, son unité est le N·m.
- ☐ $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ est indépendant du point O choisi, à condition qu'il appartienne à (Δ) (même démonstration que pour L_Δ).

Signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ indique le sens dans lequel la force tend à faire tourner le solide autour de (Δ) :

- ☐ $\mathcal{M}_\Delta > 0$: la force tend à faire tourner dans le **sens direct** (règle de la main droite ou du tire-bouchon).
- ☐ $\mathcal{M}_\Delta < 0$: la force tend à faire tourner dans le sens **rétrograde** (sens indirect).



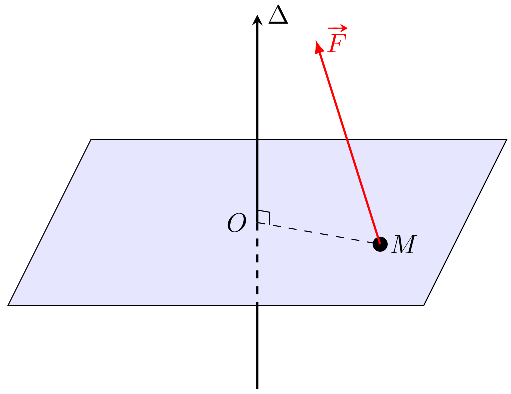
1. On peut démontrer que cette grandeur est homogène à une énergie, dont l'unité standard est la joule. Cependant, il n'y a jamais aucune justification physique à comparer énergie et moment d'une force, on gardera donc le N m comme unité standard pour celle-ci.

Bras de levier

On peut décomposer la force $\vec{F}$ en la somme de deux composantes $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$, où $\vec{F}_\parallel$ est colinéaire et $\vec{F}_\perp$ perpendiculaire à (Δ). Seule la composante perpendiculaire contribue au moment :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\parallel)}_{=0} + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\perp) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\perp)\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\perp)$$

Cela revient, *pour le calcul du moment*, à confondre la force $\vec{F}$ et sa projection $\vec{F}_\perp$ sur le plan perpendiculaire à (Δ).



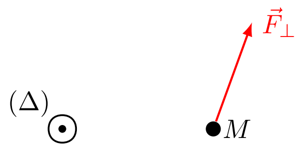
La **droite d'action** de $\vec{F}_\perp$ est la droite colinéaire à $\vec{F}_\perp$ passant par son point d'application M. Le **bras de levier** d est la distance entre l'axe (Δ) et cette droite d'action. On peut alors l'utiliser pour déterminer $\mathcal{M}_\Delta$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\perp) = |F_\perp \cdot OM \cdot \sin\theta| = |Fd|$$

avec O le point sur l'axe et sur le plan perpendiculaire passant par M.

Méthode : Calculer $\mathcal{M}_\Delta$ – méthode du bras de levier

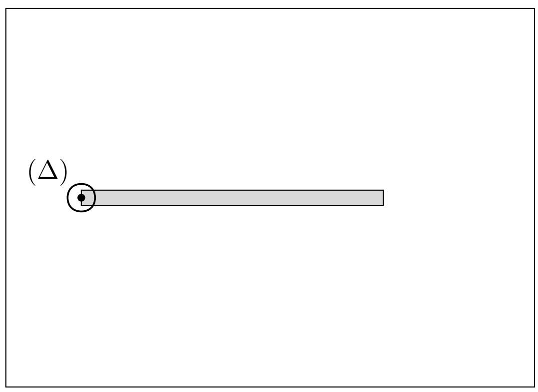
1. Décomposer $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$ (composantes parallèle et perpendiculaire à (Δ)). La composante $\vec{F}_\parallel$ ne contribue pas au moment.
2. Tracer la droite d'action de $\vec{F}_\perp$.
3. Déterminer le bras de levier d.
4. Calculer $|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = F_\perp\, d$.
5. Déterminer le signe (sens de rotation) grâce à la règle de la main droite.



Application : Moment d'une force par rapport à un axe

Une porte de largeur L pivote autour d'un axe vertical (Oz). On exerce une force horizontale $\vec{F}$ perpendiculaire à la porte, appliquée au bord libre (à distance L de l'axe).

1. Calculer $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$.
2. Même question si la force est appliquée à mi-largeur.
3. Même question si la force est appliquée au bord libre, horizontale mais faisant un angle de 45° avec la porte.



III - Théorème du moment cinétique

III.1 - Théorème du moment cinétique vectoriel (par rapport à un point)

Loi : Théorème du moment cinétique vectoriel

Soit (M, m) un point matériel soumis à un ensemble de forces $\sum \vec{F}$, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Pour tout point O **fixe dans** $\mathcal{R}$:

Démonstration

On part de la définition $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ et on dérive par rapport au temps :

Propriété : Conservation du moment cinétique

Si la somme des moments des forces en O est nulle : $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$, alors $\vec{L}_O = \overrightarrow{\text{cste}}$ (le moment cinétique est un **invariant du mouvement**).

III.2 - Théorème du moment cinétique scalaire (par rapport à un axe)

Dans la plupart des problèmes pratiques, le mouvement est plan ou se fait autour d'un axe fixe. La version scalaire du TMC est alors suffisante et plus simple à mettre en œuvre.

Loi : Théorème du moment cinétique scalaire

Soit (M, m) un point matériel soumis à un ensemble de forces $\sum \vec{F}$, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Pour tout axe (Δ) **fixe** dans $\mathcal{R}$:

Ce résultat s'obtient en projetant le TMC vectoriel sur $\vec{e}_\Delta$ (en notant que $\vec{e}_\Delta$ est fixe, donc sa dérivée est nulle).

III.3 - Applications du TMC

Le théorème du moment cinétique est l'analogue rotationnel du principe fondamental de la dynamique (PFD). Il permet de traiter efficacement les mouvements de rotation, notamment lorsque certaines forces passent par le point (ou l'axe) de référence et disparaissent du bilan.

Application : Le pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un point matériel (M, m) attaché à un fil inextensible de longueur ℓ, dont l'autre extrémité est fixée en O. Le pendule oscille dans le plan vertical autour d'un axe (Oz) horizontal. On note θ l'angle que fait le fil avec la verticale descendante.

1. Faire un schéma du système, identifier les forces appliquées et calculer leur moment par rapport à (Oz).
2. Appliquer le TMC scalaire par rapport à (Oz). En déduire l'équation différentielle du mouvement.
3. Donner l'approximation des petites oscillations et en déduire la période propre T_0.

Récapitulatif – Moments et théorème du moment cinétique

Dynamique du point	**Moment par rapport à un point O**	**Moment par rapport à un axe (Δ)**
Quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$	Moment cinétique vectoriel $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$	Moment cinétique scalaire $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_\Delta$
Force $\vec{F}$	Moment vectoriel d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$	Moment scalaire d'une force $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$
RFD $\sum \vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{a}$ dans $\mathcal{R}_{\text{gal}}$	TMC vectoriel $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ O fixe dans $\mathcal{R}_{\text{gal}}$	TMC scalaire $\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ (Δ) fixe dans $\mathcal{R}_{\text{gal}}$

Points clés à retenir

- ☐ Le TMC est une conséquence du PFD (principe fondamental de la dynamique), mais souvent plus pratique pour les mouvements de rotation.
- ☐ Les forces dont la droite d'action passe par l'axe (ou le point) de référence ont un **moment nul** et disparaissent de l'équation. En particulier, pour un **pivot parfait** (liaison pivot sans frottement), les réactions au pivot passent par l'axe : elles ne contribuent pas au TMC et on peut les ignorer.
- ☐ Pour les **mouvements plans autour d'un axe fixe**, le TMC scalaire donne directement l'équation différentielle du mouvement en une seule étape.
- ☐ Si $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}(\vec{F}) = \vec{0}$, alors $\vec{L}_O = \text{cste}$: **conservation du moment cinétique**.