MI – Chapitre F

Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Introduction

De nombreux systèmes physiques – planètes en orbite autour du Soleil, satellites artificiels, interaction entre deux charges électriques – ont en commun d'être soumis à une force dont la direction passe toujours par un point fixe. On parle alors de **force centrale**. Ce chapitre étudie les propriétés générales du mouvement dans un tel champ, puis les applique aux forces newtoniennes (gravitationnelle et coulombienne).

I - Champ de force centrale conservatif

I.1 - Champ de force centrale

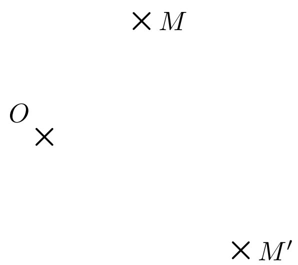
a - Définition

Définition : Force centrale

Soit $\vec{F}$ une force s'appliquant en un point mobile M, O un point fixe dans le référentiel d'étude. $\vec{F}$ est une **force centrale de centre O** si et seulement si :

- ☐ pour tout M, la droite d'action de $\vec{F}$ passe par O ;
- ☐ $\vec{F}(M)$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

En coordonnées sphériques (de centre O) :



Remarques :

- ☐ si $F_r > 0$: force répulsive (elle pousse M à s'éloigner de O) ; si $F_r < 0$: force attractive.
- ☐ On rappelle le vecteur position en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.
- ☐ Nous démontrerons par la suite que le mouvement est plan. On peut alors se placer en coordonnées cartésiennes, on aura toujours $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ et $\vec{F}(M) = F_r\,\vec{e}_r$ bien que les définitions de r et $\vec{e}_r$ ne soient pas identiques !
- ☐ Plusieurs forces classiques vues précédemment sont centrales, on peut citer les interactions gravitationnelles et électrostatiques et, sous certaines conditions, le poids, la force de rappel d'un ressort (si l'extrémité O est fixe), la tension d'un fil dans le cas du pendule simple.

b - Conservation du moment cinétique

Loi : Conservation du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, si les seules forces s'appliquant sur le système sont des forces centrales de centre O, le moment cinétique par rapport à O se conserve.

Démonstration : on applique le TMC. La force $\vec{F}$ étant centrale de centre O, son moment par rapport à ce point est nul et

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{L}_O = \overrightarrow{\text{cste}}$$

Corollaire 1 : $\vec{L}_O$ étant constant, sa direction l'est également. En appliquant la proriété du moment cinétique vue dans le chapitre précédent, on en déduit directement

Propriété : Mouvement plan

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, si les seules forces s'appliquant sur le système sont des forces centrales de centre O, **le mouvement est plan**.

Le plan du mouvement est le plan

- ☐ contenant O et perpendiculaire à $\vec{L}_O$;
- ☐ contenant $\overrightarrow{OM_0}$ et $\vec{v}_0$.

Remarque : si $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_0 \parallel \overrightarrow{OM_0}$, alors $\vec{L}_O = \vec{0}$ et le mouvement est rectiligne.

Corrolaire 2 : on peut choisir l'axe (Oz), colinéaire à $\vec{L}_O$, de même sens, on peut ainsi écrire

$$\vec{L}_O = m\vec{C} = L_{Oz}\,\vec{e}_z = mC\,\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad L_{OZ} > 0 \text{ et } C > 0$$

et se placer en coordonnées polaires.

Loi : Loi des aires

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, si les seules forces s'appliquant sur le système sont des forces centrales de centre O,

où r et θ sont les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.
C est laconstante des aires (ou constnte aréolaire).

Démonstration

On travaille dans le plan du mouvement. On pose le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

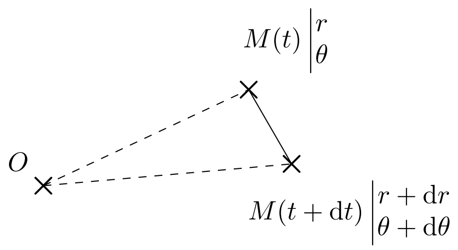
Remarques :

- ☐ C s'exprime en $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, elle est homogène à une surface divisée par un temps.
- ☐ Si $r \searrow$ alors $\dot{\theta} \nearrow$ (le mobile accélère angulairement en se rapprochant du centre).
- ☐ Si $r \nearrow$ alors $\dot{\theta} \searrow$.

Signification géométrique : la constante aréolaire C peut être interprétée en terme d'**aire balayée**, c'est-à-dire l'aire de la portion de plan décrite par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ au cours du mouvement.

Aire élémentaire

Pour un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, on passe de la position $M(t)$ à $M(t+\mathrm{d}t)$. L'aire balayée $\mathrm{d}\mathcal{A}$ est alors l'aire du triangle élémentaire $(OM(t)M(t+\mathrm{d}t))$.



La **vitesse de balayage aréolaire** est ainsi constante :

Aire finie

Sur un intervalle fini $\Delta t = t_2 - t_1$, l'aire balayée est

Sur un intervalle fini Δt, l'aire balayée est *proportionnelle à la durée, indépendamment de la position.*

Application : Vérification de la loi des aires

Un satellite décrit une orbite elliptique. En un certain point, il se trouve à $r_1 = 7000\,\mathrm{km}$ du centre de la Terre et sa vitesse angulaire est $\dot{\theta}_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Plus loin, il se trouve à $r_2 = 42\,000\,\mathrm{km}$.

1. Calculer la vitesse angulaire $\dot{\theta}_2$ à r_2.
2. Que peut-on dire qualitativement de la vitesse orbitale en r_2 par rapport à r_1 ?

I.2 - Champ de force centrale conservatif

On suppose à partir de maintenant que la force s'appliquant sur le point M est conservative en plus d'être centrale de centre O. Les résultats que nous allons voir s'appliqueront bien sûr également dans le cas d'un ensemble de forces qui sont toutes conservatives et centrales, de même centre O.
Remarque : on utilise le terme « champ » car la force, mais également son énergie potentielle associée) peut s'exprimer en tout point de l'espace, que l'objet étudié y soit positionné ou non.

a - Énergie potentielle associée

Soit $\vec{F}$ une force centrale conservative de centre O.

Lien entre force et énergie potentielle

On se place en coordonnées sphériques, on peut alors écrire

Propriété : Energie potentielle d'une force centrale conservative

L'énergie potentielle ne dépend que de r : $E_p = E_p(r)$, et :

Remarques :

- ☐ $E_p \nearrow \iff \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} > 0 \iff F_r < 0$: force attractive.
- ☐ $E_p \searrow \iff \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} < 0 \iff F_r > 0$: force répulsive.
- ☐ On retrouve les mêmes résultats, en se restreignant au plan du mouvement et en se plaçant en cordonnées polaires. On a alors $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$, ce qui mène aux mêmes calculs.

b - Exemples – rappels

Interaction gravitationnelle

On considère l'attraction gravitationnelle exercée par la masse M_a en O sur la masse m en M :

$F_r < 0$, E_p croissante : force attractive.

Interaction électrostatique (coulombienne)

On considère la force élecrostatique exercée par la charge Q en O sur la charge q en M :

Si $qQ < 0$, $F_r < 0$, E_p croissante : force attractive.
Si $qQ > 0$, $F_r > 0$, E_p décroissante : force répulsive.

Force élastique

On considère la force de rappel d'un ressort, de raideur k et de longueur à vide r_0, sur un point M accroché à son extrémité, l'autre extrémité étant fixée en O

Si $r > r_0$, $F_r < 0$, E_p croissante : force attractive.
Si $r < r_0$, $F_r > 0$, E_p décroissante : force répulsive.

c - Énergie potentielle effective

Pour une force centrale, le mouvement est plan, donc à deux dimensions, la position du point M à un instant donné est ainsi repérée par deux coordonnées, par exemple r et θ en repère polaire. La loi des aires permet cependant d'établir une relation entre ces deux coordonnées, et de se ramener à l'étude, dans le cas d'une force centrale conservative, d'un *mouvement conservatif à un degré de liberté* (cf chapitre MI-D).

Expression de $E_{p,\text{eff}}$

Le point M de masse m est soumis à une force centrale conservative. Le système est conservatif soit :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \text{cste}$$

On regroupe les deux derniers termes, qui ne dépendent que de r :

Définition : Énergie potentielle effective

$$\boxed{\phantom{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)}}$$

Remarques :

- ☐ Les expressions de $E_{p,\text{eff}}$ et E_m ne dépendent que de r : cela permet d'exprimer la conservation de l'énergie avec un seul paramètre d'espace, donc un degré de liberté, Néanmoins le mouvement reste plan et la coordonnées θ varie également.
- ☐ L'énergie potentielle effective intègre l'énergie cinétique orthoradiale. Il ne s'agit plus d'une énergie potentielle « stricte », qui ne dépend que de la position. Son expression *dépend des conditions initiales* à travers la constante$C$.

d - Étude du mouvement radial

Un système soumis à une force centrale conservative peut être étudié soit à partir des lois de Newton soit par un raisonnement énergétique. Dans cette approche, la connaissance des conditions initiales et l'étude de l'énergie potentielle effective permettent de caractériser le mouvement radial.

Méthode : Étude énergétique d'un mouvement conservatif à force centrale

On a

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) = \text{cste}$$

1. Déterminer E_m et C à partir des conditions initiales.
2. Exprimer et tracer $E_{p,\text{eff}}(r)$.
3. Les zones $E_m < E_{p,\text{eff}}$ sont interdites ($\dot{r}^2 < 0$ impossible).
4. On déduit la nature du mouvement radial selon E_m et $E_{p,\text{eff}}(r)$ (mouvement libre ou lié).
5. Le mouvement orthoradial est déduit de $\dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2}$.

Application : Étude d'un mouvement à force centrale conservative

Il faut se rappeler que l'étude de $E_{p,\text{eff}}(r)$ permet uniquement de caractériser le mouvement radial. Le mouvement orthoradial ne s'annule jamais. L'interprétation de ce graphe diffère notablement de celle d'un mouvement unidimensionnel classique.

- ☐ Les points où $E_{p,\text{eff}} = E_m$ correspondent à $\dot{r} = 0$. La distance r est extremale en ces points et la vitesse radiale est nulle : $\dot{r} = 0$. On a alors également : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ et $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = \frac{C}{r}$ (car $\dot{r} = 0$).
  - ♦ Pour r minimum, $\dot{\theta}$ et v sont maximales ;
  - ■ Pour r maximum, $\dot{\theta}$ et v sont minimales.
- ● Les points où $E_{p,\text{eff}}(r_0)$ est minimal correspondent à une position « d'équilibre » mais uniquement pour le mouvement radial. Si $r = r_0$ et $E_m = E_{p,\text{eff,min}}$, r reste constant : le mouvement est **circulaire**. La loi des aires $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$montre que le mouvement est également **uniforme**.

II - Forces centrales newtoniennes

Parmi les forces centrales conservatives, deux ont une importance fondamentale en physique : l'attraction gravitationnelle et l'interaction électrostatique. Pour ces deux forces, l'intensité décroit avec le carré de la distance, elles font partie des forces newtonniennes.

II.1 - Définition et exemples

Définition : Force newtonienne

$\vec{F}$ est une force newtonienne si :

- ☐ **Nature de la force** : La force est attractive si $K > 0$ ($F_r < 0$), répulsive si $K < 0$ ($F_r > 0$),
- ☐ **Énergie potentielle** (avec $E_{p,\infty} = 0$) :

$$E_p(r) = -\frac{K}{r}$$

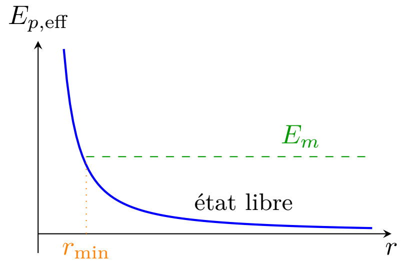
- ☐ **Énergie potentielle effective** :

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$$

- ☐ **Exemples :**
  - — attraction gravitationnelle $K = Gm_1m_2$;
  - — interaction coulombienne $K = -\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}$.

II.2 - Force newtonnienne répulsive ($K < 0$)

- ☐ Exemple : interaction coulombienne entre deux charges de même signe.
- ☐ $E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{K}{r}$ avec $K < 0$, donc $-K/r > 0$: les deux termes sont positifs, $E_{p,\text{eff}} > 0$ pour tout r.
- ☐ $E_{p,\text{eff}}$ est décroissante depuis $+\infty$ (en $r \to 0^+$) vers 0 (en $r \to +\infty$).
- ☐ Comme $E_{p,\text{eff}}$ est strictement décroissante, le mouvement est **toujours libre** (état de diffusion).



Propriété : Trajectoire (force newtonnienne répulsive)

La trajectoire est une **hyperbole** dont le centre de force est le foyer *extérieur* de l'hyperbole.

Cette propriété est admise dans le cadre du programme de PTSI. On « rappelle » ci-dessous quelques propriétés d'une hyperbole

Annexe : Propriétés d'une hyperbole

- ☐ **Définition** : Une hyperbole est l'ensemble des points du plan tels que la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixes (appelés foyers) est constante. Autrement dit, en notant F_1 et F_2 les deux foyers, pour tout point M sur l'hyperbole,

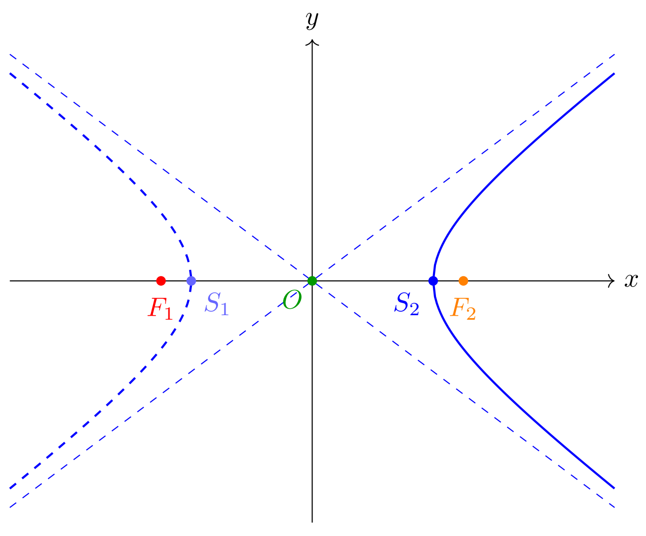
$$|MF_1 - MF_2| = \text{cste}$$

- ☐ **Équation cartésienne** : On choisit un repère cartésienne dont l'origine O est le milieu de $[F_1F_2]$, avec un axe (Ox) colinéaire à $\overrightarrow{F_1F_2}$, de même sens. $M(x, y)$ est sur l'hyperbole si et seulement si

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a et b sont des constantes positives, homogènes à une distance L, dont la valeur dépend de la constante précédente et de la distance F_1F_2.

- ☐ **Caractéristiques importantes** :
  - — Elle possède deux branches distinctes (en pratique, en mécanique, seule une des deux constitue la trajectoire).
  - — Elle est symétrique en x, y et O.
  - — Elle possède deux asymptotes qui se croisent en O.
  - — Les sommets S sont les points qui croisent l'axe des abscisses



Remarques :

- Il ne faut pas confondre le centre de l'hyperbole (milieu des deux foyers , O sur le schéma), et le centre de force (foyer extérieur, du côté de la branche qui ne correspond pas à la trajectoire, F_1 sur le schéma).
- Lorsque M est au sommet de l'hyperbole, $r = F_1S_2$ est minimum et la vitesse est maximale.

II.3 - Force newtonnienne attractive ($K > 0$)

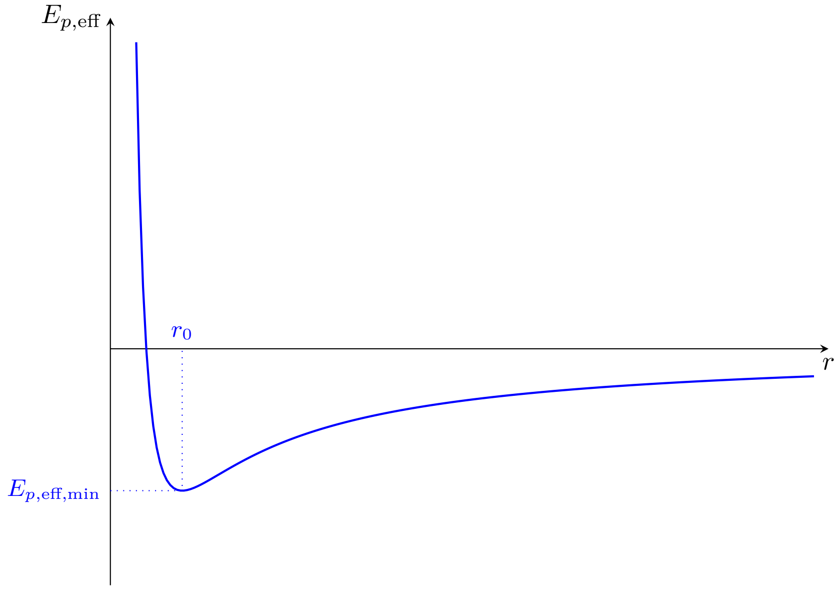
☐ Exemples : interaction coulombienne entre deux charges de signes opposés, attraction gravitationnelle.

☐ $E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{K}{r}$ avec $K > 0$

- pour $r \to 0^+$, $E_{p,\text{eff}}(r) \approx \dfrac{mC^2}{2r^2}$ et $E_{p,\text{eff}}$ tend ers $+\infty$;
- pour $\to +\infty$, $E_{p,\text{eff}}(r) \approx -\dfrac{K}{r}$ et $E_{p,\text{eff}}$ tend ers O^- ;
- $E_{p,\text{eff}}$ est initialement décroissante, puis croissante : elle passe par un minimum

$$\text{en } r_0 = \frac{mC^2}{K} \quad ; \quad E_{p,\text{eff,min}} = E_{p,\text{eff}}(r_0) = -\frac{K^2}{2mC^2}$$

☐ Plusieurs types de trajectoires sont possibles selon E_m :



Propriété : Trajectoires selon E_m (force newtonienne attractive)

- $E_m > 0$: mouvement **libre** (état de diffusion). La trajectoire est une **hyperbole** dont le centre de force est le foyer *intérieur* (foyer F_2 sur le schéma précédent).
- $E_m = 0$: mouvement **libre** (état de diffusion). La trajectoire est une **parabole** dont le centre de force est le foyer [1].
- $E_{p,\text{eff,min}} < E_m < 0$: mouvement **lié** (état lié). La trajectoire est une **ellipse** dont le centre de force est un des foyers.
- $E_m = E_{p,\text{eff,min}}$: mouvement **lié** (état lié). La trajectoire est un **cercle** dont le centre de force est le centre.

Cette propriété est admise dans le cadre du programme de PTSI. On « rappelle » ci-dessous quelques propriétés d'une ellipse :

1. Une parabole peut être définie comme l'ensemble des points du plan qui sont équidistants d'un point fixe (le *foyer*) et d'une droite (la *directrice*). Par exemple, pour $y = x^2$, le foyer est $F(0, -1/4$ et la directrice la droite (Δ) d'équation $y = -1/4$.

Annexe : Propriétés d'une ellipse

☐ **Définition** : Une ellipse est l'ensemble des points du plan tels que la valeur absolue de la somme des distances à deux points fixes (appelés foyers) est constante. Autrement dit, en notant F_1 et F_2 les deux foyers, pour tout point M sur l'hyperbole,

$$|MF_1 + MF_2| = \text{cste}$$

☐ **Équation cartésienne** : On choisit un repère cartésien dont l'origine O est le milieu de $[F_1F_2]$, avec un axe (Ox) colinéaire à $\overrightarrow{F_1F_2}$, de même sens. $M(x, y)$ est sur l'ellipse si et seulement si

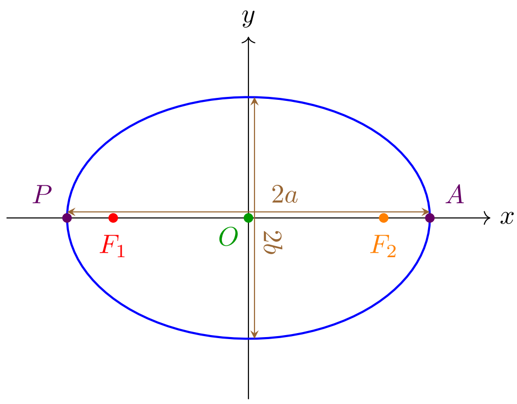
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a et b sont des constantes positives, homogènes à une distance L, dont la valeur dépend de la constante précédente et de la distance F_1F_2.

☐ **Caractéristiques importantes** :

— Elle est symétrique en x, y et O.

— a est le *demi grand-axe* et b le *demi petit-axe* de l'ellipse. Si $a = b$, l'ellipse est un cercle.



Remarques :

— Il ne faut pas confondre le centre de l'ellipse (milieu des deux foyers , O sur le schéma), et le centre de force (un des foyers, par exemple F_1 sur le schéma).

— Le point de la trajectoire le plus proche du centre de force est le **périgée**. r est minimum et la vitesse maximale.

— Le point de la trajectoire le plus éloigné du centre de force est l'**apogée**. r est maximum et la vitesse minimale.

III - Application aux planètes et satellites

L'objectif est ici d'appliquer les résultats, méthodes et propriétés vus précédemment aux mouvements d'objets soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle. Plus particulièrement, nous distinguerons :

— planètes, comètes... : soumis à l'attraction gravitationnelle du Soleil, le référentiel d'étude est le référentiel *héliocentrique* ;

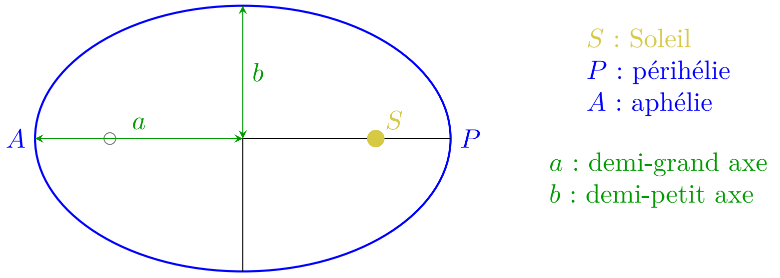
— satellites : soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre, le référentiel d'étude est le référentiel *géocentrique*.

III.1 - Lois de Kepler

L'attraction gravitationnelle du Soleil (masse M_S) sur une planète (masse m) est une force centrale newtonienne attractive ($K = GM_S m > 0$). On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

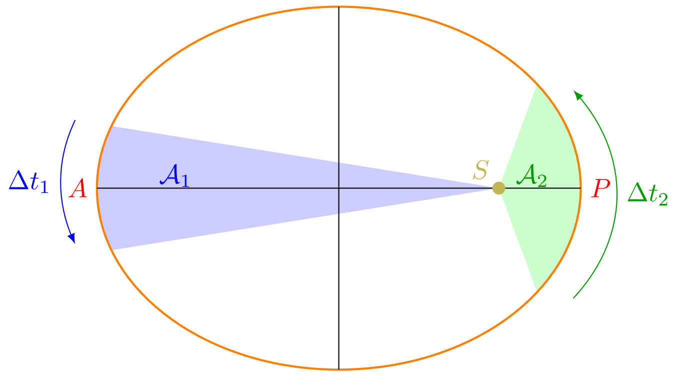
Loi : 1ère loi de Kepler – loi des orbites

Les planètes décrivent des trajectoires **elliptiques** dont le Soleil est un des foyers.



Loi : 2e loi de Kepler – loi des aires

Les aires balayées par une planète pendant des intervalles de temps **égaux** sont **égales**.



$$\boxed{\Delta t_2 = \Delta t_1 \implies \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1}$$

Loi : 3e loi de Kepler – loi des périodes

Pour toutes les planètes du Système solaire, le rapport du carré de la période de révolution au cube du demi-grand axe est identique :

Démonstration de la 3^e loi de Kepler pour une orbite circulaire

Pour une orbite circulaire de rayon R ($a = b = R$), en coordonnées polaires de centre $S \equiv O$:

Ce résultat se généralise à toute ellipse en remplaçant R par a (démonstration hors programme).

Remarques :

- ☐ Les lois de Kepler s'appliquent aussi aux **satellites** en remplaçant M_S par M_T (masse de la Terre) et le référentiel héliocentrique par le référentiel géocentrique.
- ☐ La 3^e loi lie T^2/a^3 à la masse du corps central uniquement → elle est identique pour tous les satellites d'une même planète.

Application : 3^e loi de Kepler – comparaison de deux planètes

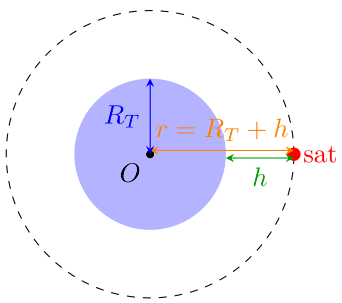
La période de révolution de la Terre est $T_T = 1\,\text{an}$ et son demi-grand axe est $a_T = 1\,\text{UA}$. Mars a un demi-grand axe $a_{\text{M}} = 1{,}52\,\text{UA}$. Calculer la période de révolution de Mars.

III.2 - Satellite en mouvement circulaire

On considère un satellite de masse m_s en orbite circulaire autour de la Terre (masse M_T), à une altitude h, donc à distance

$$r = R_T + h$$

du centre de la Terre (*ie* centre de force O). On se place dans le réferentiel géocentrique, supposé galiléen



a - Orbite circulaire

On démontre aisément que le mouvement est **uniforme** :

— par la loi des aires : $C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$ et $r = \text{cste} \implies \dot{\theta} = \text{cste}$ et $v = r\dot{\theta} = \text{cste}$;

— en projetant le PFD sur $\vec{e}_\theta$ (cf démonstration de la 3e loi de Kepler).

Vitesse orbitale

La projection du PFD sur $\vec{e}_r$ donne :

Remarques :

— v ne dépend pas de m_s : tous les satellites sur la même orbite vont à la même vitesse.

— v augmente lorsque r diminue.

Définition : Première vitesse cosmique

La 1re vitesse cosmique est la vitesse d'un satellite en orbite circulaire au niveau du sol : $h \approx 0$ et $r \approx R_T$).

Valeur numérique de v_1

Données : $M_T = 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, $R_T = 6400\,\text{km}$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}$.

Période de révolution

Remarque : On retrouve la 3e loi de Kepler.

b - Orbite basse

La majorité des satellites existant sont en orbite basse (LEO, Low Earth Orbit), juste au dessus de la limite de l'atmosphère : $h = 300$ à $2000\,\text{km}$. C'est par exemple le cas d'un grand nombre de satellites de communication et de télédétection. Les avantages sont multiples : faible coût de mise en orbite, débit élevé et faible temps de latence (télécommunication), résolution élevée (télédétection). Il existe également de nombreux inconvénients, le premier étant qu'ils doivent avoir une vitesse élevée pour rester sur leur orbite. Ils se déplacent donc très rapidement par rapport à un point fixe sur la Terre et il faut un grand nombre de satellites pour couvrir en permanence un point donné (constellation Starlink par exemple). Par ailleurs, du fait de la proximité avec l'atmosphère, les frottements restent présents, ce qui limite fortement leur durée de vie.

Pour ces satellites, pour lesquels $r = R_T + h$ avec $h \ll R_T$, on peut faire les approximations suivantes :

— approximation grossière : $h \approx 0$ et $r \approx R_T$, on retrouve la 1$^{\text{re}}$ vitesse cosmique.

— approximation linéaire : $r = R_T + h = R_T \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)$ avec $\frac{h}{R_T} \ll 1$.

Application : Vitesse de l'ISS

Calculer la vitesse orbitale de l'ISS en orbite à $h = 413\,\text{km}$.

L'ISS fait le tour de la Terre en environ $90\,\text{min}$.

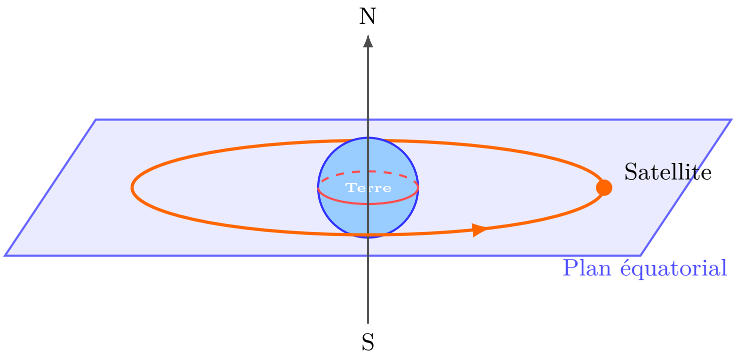
c - Satellite géostationnaire

Définition : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre.

Il doit donc :

- ☐ avoir le même axe de rotation que la Terre (axe N–S) et tourner dans le même sens ;
- ☐ avoir la même période de rotation : $T_{\text{sat}} = 1\,\text{jour sidéral} = 23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,4\,\text{s} \approx 24\,\text{h}$.
- ☐ La force centrale imposant que le mouvement est plan passant par O (centre de la Terre), et $\overrightarrow{OT}$ (axe de rotation de la Terre) étant le seul axe compatible, le satellite est nécessairement dans le **plan équatorial**.



Altitude et vitesse d'un satellite géostationnaire

Le rayon orbital se calcule à partir de la 3ᵉ loi de Kepler :

d - Vitesse de libération

La **vitesse de libération** est la vitesse minimale nécessaire pour qu'un objet quitte définitivement l'attraction terrestre (atteigne $r \to +\infty$). Pour déterminer son expression, on revient à un raisonnement énergétique, la condition est $\boxed{E_m = 0}$.

Vitesse de libération

- ☐ Pour $v > v_L$, $E_m > 0$: le mouvement est libre et la trajectoire est une hyperbole ;
- ☐ pour $v = v_L$, $E_m = 0$: le mouvement est libre et la trajectoire est une parabole ;
- ☐ pour $v < v_L$, $E_m < 0$: le mouvement est lié et la trajectoire est une ellipse ;

Définition : Deuxième vitesse cosmique

La 2ᵉ vitesse cosmique est la vitesse minimale nécessaire pour qu'un objet lancé depuis la surface terrestre quitte définitivement l'attraction terrestre [2].

Valeur numérique de v_2

2. C'est donc la vitesse de libération pour $h = 0$ ou $r = R_T$.