

Correction MI – TD 1

Cinématique du point

I - Détermination d'une trajectoire

1. On écrit $t = \frac{x}{2}$. On en déduit $y(x) = x(x-2)$. Le mouvement est parabolique.
2. Par définition $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$, soit $\vec{v} = 2\vec{u}_x + (8t-4)\vec{u}_y$.
3. Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, soit $\vec{a} = 8\vec{u}_y = \overrightarrow{cste}$.
4. Le mouvement est accéléré si $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ et retardé si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$

II - Caractérisation d'un mouvement

Remarque préliminaire : dans cet exercice, où le mouvement est rectiligne, on note v et a les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération, c'est-à-dire les composantes des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ selon $\vec{u}_x$. Ce ne sont donc pas, comme définis dans le cours, les normes des vecteurs et on peut avoir $v < 0$ ou $a < 0$. On a donc $\vec{v} = v\vec{u}_x$ et $\vec{a} = a\vec{u}_x$.

Les 5 phases du mouvements sont définies par :

- i) $0 \leq t \leq 30$ s
- ii) $30 \leq t \leq 50$ s
- iii) $50 \leq t \leq 60$ s
- iv) $60 \leq t \leq 80$ s
- v) $90 \leq t \leq 100$ s

1. La valeur algébrique de l'accélération est donnée par $a = \frac{dv}{dt} = a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ car a est constante sur chaque phase du mouvement.
2. Comme a est constante, l'expression de $v(t)$ est $v(t) = at + v_0$
3. Le mouvement est rectiligne. Il est accéléré si $a \cdot v > 0$, retardé si $a \cdot v < 0$ et uniforme si $a = 0$

Phase	a (ms ⁻²)	v (ms ⁻¹ , t en s)	Mouvement
i)	1	t	rectiligne (uniformément) accéléré
ii)	0	30	rectiligne uniforme
iii)	-3	$30 - 3t$	rectiligne (uniformément) décéléré
iv)	0	0	Pas de mouvement
v)	-1,5	$-1,5t$	rectiligne (uniformément) <u>accéléré</u>

III - Un porte-avion

Le mouvement est rectiligne, on choisit comme repère d'étude le repère $(Oxyz)$ où l'axe (Ox) est l'axe du mouvement, orienté selon celui-ci et comme point O la position initiale de l'avion. On a alors trivialement $\vec{OM} = x\vec{u}_x$, $\vec{v} = v\vec{u}_x$ et $\vec{a} = a\vec{u}_x$. Tout se passe le long de l'axe (Ox) , on pourra à partir de maintenant manipuler exclusivement des équations scalaires. On prend comme origine des temps le début du mouvement, on a alors $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

On sait $a = cste$ et $a = \frac{dv}{dt}$, on en déduit $v(t) = at + v(0)$ soit $v(t) = at$. Pareillement, on a $v = \frac{dx}{dt}$, ce qui donne $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + x(0)$ soit $x(t) = \frac{1}{2}at^2$.

En $t = t_0$, on a $v(t_0) = v_0$ et $x(t_0) = d$, on peut donc écrire $v_0 = at_0$ et $\frac{1}{2}at_0^2 = d$. On remplace at_0 par v_0 dans

la deuxième égalité, on obtient $t_0 = \frac{2d}{v_0}$ et donc $a = \frac{v_0}{t_0} = \frac{v_0^2}{2d}$.

Application numérique : $t_0 = \frac{2 \times 25}{250/3,6} = 0,72$ s et $a = \frac{250/3,6}{0,72} = 96,5$ ms⁻² $\approx 10g$

IV - Système bielle-manivelle

- Le point A se déplace sur un cercle de centre O et de rayon b le vecteur $\overrightarrow{OA}$ fait un angle $\theta = \omega t$ avec l'axe (Ox) , on a donc $\overrightarrow{OA}(t) = b [\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y]$.
 — Si on appelle H la projection du point A sur l'axe (Ox) , on a $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OH} = b \cos(\theta)\vec{u}_x$. On en déduit $\overrightarrow{OB}(t) = 2b \cos(\omega t)\vec{u}_x$.
 — Le point M est le milieu du segment $[AB]$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ ce qui donne

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{3}{2}b \cos(\omega t)\vec{u}_x + \frac{1}{2}b \sin(\omega t)\vec{u}_y$$

- Par définition $\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$, soit $\vec{a}_M = -\frac{b\omega^2}{2} (3 \cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y)$.

V - Big Ben

- On peut considérer que le mouvement est circulaire uniforme. On se place donc en coordonnées polaires pour la suite de l'exercice.
- L'aiguille des minutes fait un tour complet (2π radians) en une heure, sa vitesse angulaire est donc $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_{moy} = \frac{2\pi}{3600s}$ soit $\omega = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$.
- Le mouvement étant circulaire sur un cercle de rayon L , on a $\vec{v}_M = L\omega\vec{e}_\theta$ soit $v_M = L\omega = 6,98 \text{ mm s}^{-1}$.
- Le mouvement est circulaire uniforme, on a donc $\vec{a}_M = -L\omega^2\vec{e}_r = -\frac{v_M^2}{L}\vec{e}_r$ soit $a_M = L\omega^2 = \frac{v_M^2}{L} = 1,22 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$.

VI - Le TGV

On peut se placer dans le repère de Fresnet lié au TGV. On a alors $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ où $\vec{a}_T$ est l'accélération tangentielle et $\vec{a}_N$ l'accélération normale.

Comme le mouvement est uniforme, $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{e}_T = \vec{0}$, il reste $\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{e}_N$ où R est le rayon de courbure local de la trajectoire. On a donc $a = a_N = \frac{v^2}{R}$.

Si on veut $a < 0,05g$, cela implique $\frac{v^2}{R} < \frac{g}{20}$ soit $R > \frac{20v^2}{g}$. On a bien un rayon minimal $R_{min} = \frac{20v^2}{g}$.

A.N. : $R_{min} = \frac{20 \times (300/3,6)^2}{9,81} = 14,2 \text{ km}$.

VII - Collision ?

- La voiture A n'a pas encore freiné, elle est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme. La distance parcourue est donc $d_A = v_0\Delta t = 80 \text{ m}$.
 Le véhicule B freine pendant les $2s$, son accélération est constante, opposée à la vitesse. L'expression de la vitesse est donc, en prenant pour le moment l'origine des temps à l'instant où il commence à freiner, $v(t) = v_0 - at$ et la distance parcourue est alors $x_B(t) = v_0t - \frac{1}{2}at^2$ soit $d_B = x_B(t = 2s) = 30 \text{ m}$. Sa vitesse, lorsque A commencera à freiner sera alors $40 - 5 \times 2 = 30 \text{ m s}^{-1}$.
- L'origine des temps est l'instant où le véhicule A commence à freiner et l'origine de l'axe (Ox) , axe du mouvement, est sa position initiale, on a donc :
 — véhicule A : $x_A(t = 0) = 0$ et $v_A(t = 0) = v_{0A} = 40 \text{ m s}^{-1}$.
 — véhicule B : $x_B(t = 0) = d_0 = d + d_B - d_A = 30 \text{ m}$ et $v_B(t = 0) = v_{0B} = 30 \text{ m s}^{-1}$
- Pour les deux véhicules, l'accélération est supposée constante, de sens opposée à la vitesse, on en déduit rapidement
 — $v_A(t) = v_{0A} - at$ et $x_A(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_{0A}t$;

$$- v_B(t) = v_{0B} - at \text{ et } x_B(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_{0B}t + d_0 ;$$

4. Il y a choc si les deux véhicules occupent la même position au même instant, c'est-à-dire s'il existe un

$$\text{instant } t_c \text{ tel que } x_A(t_c) = x_B(t_c), \text{ ce qui conduit à } (v_{0A} - v_{0B})t_c = d_0 \text{ soit } t_c = \frac{d_0}{v_{0A} - v_{0B}}.$$

Cependant, les équations du mouvement ne sont valables que tant que les véhicules ne sont pas arrêtés. Si on appelle respectivement t_A et t_B les temps d'arrêt des 2 véhicules, il reste à vérifier $t_c < t_A$ et $t_c < t_B$. On voit rapidement que le véhicule B s'arrête avant le A (il a la même accélération de freinage que A mais va initialement moins vite), il suffit alors de vérifier $t_c < t_B$. t_B est donné par $v_B(t_B) = 0$ soit $t_B = \frac{v_{0B}}{a}$.

A.N. : $t_c = \frac{30}{40-30} = 3 \text{ s}$ et $t_B = \frac{30}{5} = 6 \text{ s}$. On a bien $t_c < t_B$, il y aura bien collision en $t_c = 3 \text{ s}$.

VIII - Une sortie d'autoroute

1. Bretelle de sortie – Pour cette partie, on peut se placer dans le repère de Fresnet.

(a) $\vec{v} = v\vec{T}$ et $\vec{a} = a\vec{T} + \vec{a}_N = v\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\vec{e}_N$.

- (b) $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, $\vec{a}$ est orienté vers l'intérieur de la courbure avec $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ si le mouvement est accéléré, $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ si le mouvement est retardé et $\vec{a} \perp \vec{v}$ si le mouvement est uniforme.

- (c) La valeur de l'accélération est donnée par $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \geq \frac{v^2}{R}$.

Donc si $v = v_0$, $a \geq \frac{v_0^2}{R} = \frac{(130/3,6)^2}{50} = 26,1 \text{ ms}^{-2}$. Cette valeur est largement supérieure à $\mu g = 26,1 \text{ ms}^{-2}$, ce qui n'assure pas des conditions d'adhérence satisfaisantes (les calculs sur route mouillée donneraient des résultats similaires).

- (d) Si on est à la limite de l'adhérence, donc $v \approx v_0$, le fait de freiner va faire varier la vitesse et donc faire apparaître un terme $\frac{dv}{dt} < 0$ dans l'expression de a . a va donc temporairement augmenter et risque alors de dépasser la limite μg , ce qui entraînera une perte d'adhérence.

- (e) Si on ne freine pas dans le virage, on a $a = \frac{v^2}{R}$. La condition $a < \mu g$ amène à $v < v_b$ avec $v_b = \sqrt{\mu g R}$.

A.N. : route sèche : $v_{bs} = \sqrt{1 \times 10 \times 50} = 22,4 \text{ m s}^{-1} = 80,5 \text{ km h}^{-1}$; route mouillée : $v_{bm} = \sqrt{0,3 \times 10 \times 50} = 12,2 \text{ m s}^{-1} = 44,1 \text{ km h}^{-1}$

2. Voie de décélération – Dans cette partie, le mouvement est rectiligne retardé, on choisit un repère cartésien où (Ox) est l'axe du mouvement et O la position initiale de la voiture.

- (a) On suppose qu'on freine avec une accélération constante $a < \mu g$, on a donc $\vec{a} = -a\vec{u}_x$. On en déduit $v(t) = K - at$. Comme $v(t=0) = v_0$ on a $K = v_0$ et donc $v(t) = v_0 - at$.

- (b) On intègre une nouvelle fois pour obtenir la position : $x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t$ (car $x(0) = 0$). On sait que, au bout de la voie décélération donc pour $x = l$, il faut $v \leq v_b$. On va alors chercher une relation entre v et x . Pour cela on peut écrire $at = v_0 - v$ et donc $ax = -\frac{(v_0-v)^2}{2} + v_0(v_0 - v) = \frac{v_0^2 - v^2}{2}$. Donc

$$\text{pour } x = l, l = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}. \text{ Comme } a < \mu g \text{ et } v < v_b, \text{ il faut } l > l_{\min} \text{ avec } l_{\min} = \frac{v_0^2 - v_b^2}{2\mu g}.$$

A.N. : route sèche : $l_{\min,s} = \frac{(130/3,6)^2 - 22,4^2}{2 \times 10} = 40,1 \text{ m}$; route mouillée : $l_{\min,m} = \frac{(110/3,6)^2 - 12,2^2}{2,3 \times 10} = 131 \text{ m}$

IX - Mouvement décéléré

1. Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ soit, en projetant sur l'axe (Ox) et en notant $v = v_x$ (vrai tant que $v_x \geq 0$)

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

2. L'équation précédente¹ peut se réécrire $-\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} = k$ soit $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \right) = k$. Ce qui donne $\frac{1}{v} = kt + A$. Or en $t = 0$,

$$v(0) = v_0, \text{ on en déduit } A = \frac{1}{v_0} \text{ soit } v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0t}.$$

On sait également $\frac{dx}{dt} = v$, on peut alors intégrer pour aboutir à $x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0t) + B$. La condition

$$\text{initiale } x(0) = 0 \text{ donne } B = 0 \text{ et donc } x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0t).$$

1. On reconnaît une équation similaire à l'équation régissant une loi de cinétique chimique d'ordre 2.

3. L'équation précédente donne $1 + kv_0 t = e^{kx}$. En reportant dans l'expression de $v(t)$, on trouve l'expression demandée : $\boxed{v(x) = v_0 e^{-kx}}$.