

Correction MI – TD 3

Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

I - Distance minimale de freinage

On note v_0 la vitesse initiale de la voiture et d la distance de freinage. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le début du freinage et l'arrêt total : $\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$.

On a évidemment $\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$. Les forces s'appliquant sur la voiture sont son poids $\vec{P}$ et la réaction de la route $\vec{R}$. Le mouvement étant horizontal, le poids ne travaille pas et seule la composante tangentielle de $\vec{R}$, qui correspond aux frottements, travaille. Comme elle est constante, on voit rapidement $W(\vec{R}) = \int_{M_i}^{M_f} \vec{R} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x_i}^{x_f} -F dx = -Fd$. On a donc $\frac{1}{2}mv_0^2 = Fd$.

Si on note d_1 et d_2 les distances de freinage pour des vitesses initiales respectives v_1 et v_2 , on a $\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$.

La distance de freinage est donc proportionnelle au carré de la vitesse.

Pour le 2nd cas, on trouve $d_2 = 40 \left(\frac{80}{50}\right)^2 = 40 \times 2,56 = 102 \text{ m}$.

II - Mouvement rectiligne uniforme

1. Les forces s'appliquant sur le système sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$
- la réaction de la neige $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y = -R_T \vec{e}_x + R_N \vec{e}_y$
- la traction du télési $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y = T \cos \beta \vec{e}_x + T \sin \beta \vec{e}_y$

2. Le travail élémentaire du poids est $dW(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{\ell}$. Comme le mouvement est uniquement le long de l'axe (Ox) , $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x$ et donc $dW(\vec{P}) = P_x \cdot dx = -mg \sin \alpha dx$. Le travail fini du poids sur le déplacement est alors $W(\vec{P}) = \int -mg \sin \alpha dx = -mg \sin \alpha \int dx$ et donc $W_L(\vec{P}) = -mg \sin \alpha L$.

La valeur négative correspond bien au fait que, sur ce déplacement, le poids est résistant. A.N. : $W_L(\vec{P}) = -410 \text{ kJ}$.

3. On applique le même raisonnement pour $\vec{R}$: $W(\vec{R}) = \int \vec{R} \cdot d\vec{\ell} = \int R_x dx = - \int R_T dx$ et donc $W_L(\vec{R}) = -R_T L$. On retrouve une valeur négative, ce qui est cohérent avec le fait que c'est la composante tangentielle de $\vec{R}$, qui correspond aux frottements, qui travaille. A.N. : $W_L(\vec{R}) = -75 \text{ kJ}$.

4. On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le départ et l'arrivée : le mouvement étant uniforme, on a $\Delta E_c = 0$, ce qui mène à $\sum W_L(\vec{F}) = W_L(\vec{P}) + W_L(\vec{T}) + W_L(\vec{R}) = 0$ et donc

$$W_L(\vec{T}) = -(W_L(\vec{P}) + W_L(\vec{R})) = (mg \sin \alpha + R_T)L$$

Cette valeur, positive, correspond bien au rôle moteur du télési. A.N. : $W_L(\vec{T}) = 485 \text{ kJ}$

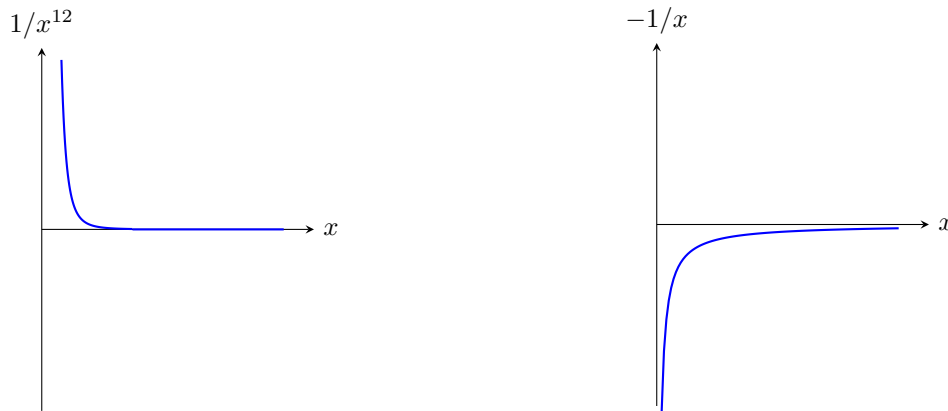
5. La puissance dépensée est la puissance de la force de traction $\vec{T}$. On peut la calculer soit en partant de $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v}$ et en utilisant le fait que le mouvement est rectiligne uniforme pour déterminer $\vec{T}$, soit en partant de $\mathcal{P}(\vec{T}) = \frac{dW(\vec{T})}{dt}$. On trouve $\mathcal{P}(\vec{T}) = (mg \sin \alpha + R_T)v$. A.N. : $\mathcal{P}(\vec{T}) = 874 \text{ W}$.

6. Si la longueur du télési est $L = 1500 \text{ m}$ et que les skieurs sont espacés de $d = 12 \text{ m}$ au minimum, alors le nombre de skieurs tractés simultanément par le télési est au maximum $n = \frac{L}{d} = 125$. La puissance

minimale du télési est alors $\mathcal{P}_T = n\mathcal{P}(\vec{T})$ soit $\mathcal{P}_T = \frac{(mg \sin \alpha + R_T)Lv}{d}$. A.N. : $\mathcal{P}_T = 109 \text{ kW}$

III - Molécule diatomique

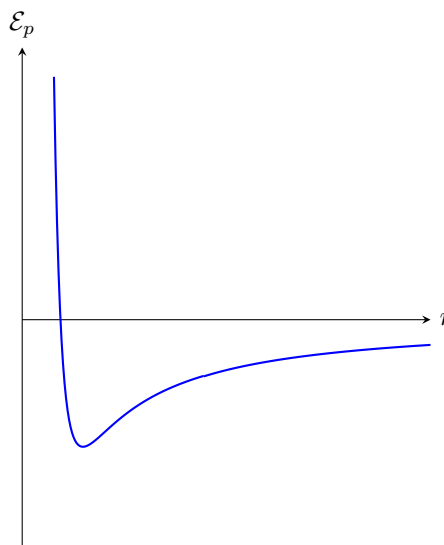
1. Pour tracer l'allure de la courbe, il faut étudier les 2 termes dans l'énergie. Traçons $x \rightarrow \frac{1}{x^{12}}$ et $x \rightarrow \frac{-1}{x}$:



On constate que pour des valeurs très petites de r , c'est le terme en puissance 12 qui est beaucoup plus grand et on a donc $\mathcal{E}_p(r)$ qui tend vers $+\infty$ quand r tend vers 0.

En revanche, pour des valeurs plus grandes de r , c'est le terme en puissance 1 qui est beaucoup plus grand (en valeur absolue), et on a donc $\mathcal{E}_p(r)$ qui tend vers 0^- quand r tend vers ∞ .

Le graphe associé à l'évolution de $\mathcal{E}_p$ en fonction de r est donnée ci-dessous :



Pour déterminer le terme correspondant à une action attractive ou répulsive, étudions chaque terme séparément. On constate que sur le graphe de $1/r^{12}$, l'énergie potentielle est décroissante, ce qui implique $\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} < 0$. Or on sait que la relation entre la force et l'énergie potentielle dont elle dérive est $\vec{F} = -\text{grad } \mathcal{E}_p$.

On en déduit que $F_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} > 0$. Il s'agit donc du terme répulsif.

De la même façon, sur le graphe en $-1/r$ l'énergie potentielle est croissante. Il s'agit donc du terme attractif.

L'action attractive peut être interprétée comme l'interaction entre deux charges de signes différents, tandis que l'action répulsive peut être interprétée comme l'impossibilité d'interpénétration des deux atomes.

2. Pour trouver le minimum de cette énergie potentielle, il faut la dériver par rapport à r et l'annuler :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -12\frac{A}{r^{13}} + \frac{B}{r^2} \quad \text{or} \quad \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\right)_{r=r_0} = 0$$

Ainsi :

$$-12\frac{A}{r_0^{13}} + \frac{B}{r_0^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{r_0 = \sqrt[11]{\frac{12A}{B}}}$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une position d'équilibre stable, il faut dériver une deuxième fois :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dr^2} = 12 \times 13 \frac{A}{r^{14}} - 2 \frac{B}{r^3} = \frac{1}{r^3} \left(156 \frac{A}{r^{11}} - 2B \right)$$

En remplaçant r par r_0 , on obtient :

$$\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dr^2} \right)_{r=r_0} = \frac{1}{\left(\frac{12A}{B} \right)^{3/11}} \left(156 \frac{A}{\frac{12A}{B}} - 2B \right) = \left(\frac{12A}{B} \right)^{-3/11} (13B - 2B) = 11B \left(\frac{12A}{B} \right)^{-3/11} > 0$$

car B est une constante positive.

Donc r_0 est bien une position d'équilibre stable.

3. L'énergie de dissociation de la molécule est donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = \mathcal{E}_p(+\infty) - \mathcal{E}_p(r_0)$$

Il suffit donc de calculer :

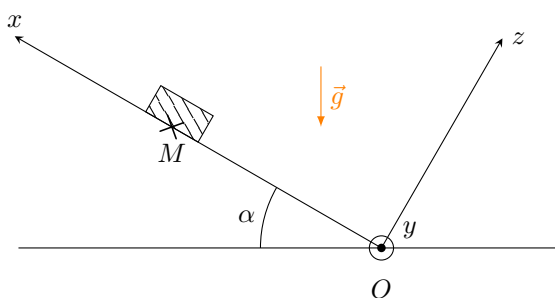
$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = 0 - \left(\frac{A}{r_0^{12}} - \frac{B}{r_0} \right) = \frac{1}{r_0} \left(B - \frac{A}{r_0^{11}} \right) = \left(\frac{12A}{B} \right)^{-1/11} \left(B - \frac{AB}{12A} \right)$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{diss}} = \frac{11}{12} B \left(\frac{12A}{B} \right)^{-1/11}}$$

IV - Glissades et frottement sur plan incliné

1. On se place dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}$) supposé galiléen. On étudie le palet supposé ponctuel en M . On utilise un repère cartésien (O, x, y, z) avec (Ox) le long du plan support du mouvement et vers le haut et (Oz) orthogonal à ce plan (cf schéma).



Le palet étant lancé vers le haut de la piste, la vitesse initiale et l'ensemble des forces (poids, réaction du support) sont coplanaires et la trajectoire est la droite intersection du plan du support et du plan $(\vec{v}_0, \vec{g})$.

On a $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x$, $\vec{v}_{M/R} = \dot{x} \vec{e}_x$ et $d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x$.

Le poids s'exprime $\vec{P} = m \vec{g} = -mg(\cos(\alpha) \vec{e}_z + \sin(\alpha) \vec{e}_x)$.

La réaction du support s'exprime $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = \vec{N} = \|\vec{N}\| \vec{e}_z = N_z \vec{e}_z$ car la composante tangentielle est nulle puisqu'il n'y a pas de frottement et $N_z > 0$ compte tenu de l'orientation de l'axe (Oz) (la réaction normale repousse le palet vers l'extérieur du support incliné).

On calcule le travail du poids entre O et B :

$$W_{O \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_O^B \vec{P} \cdot d\overrightarrow{OM} = -mg \sin(\alpha) \int_{x(O)}^{x(B)} dx = -mg \sin(\alpha) (x(B) - x(O)) = -mg \sin(\alpha) d$$

Le travail de la réaction du support est nul puisqu'elle est orthogonale au déplacement : $\vec{R} \perp d\vec{OM}$.
La variation d'énergie cinétique s'exprime :

$$\Delta E_c \equiv E_c(B) - E_c(O) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(B)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}(O)\|^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Finalement, par application à M du théorème de l'énergie cinétique dans $(\mathcal{R})$ supposé galiléen :

$$\Delta E_c = W_{O \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{O \rightarrow B}(\vec{R}) \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg \sin(\alpha)d$$

et finalement

$$d = \frac{v_0^2}{2g \sin(\alpha)}$$

On note v'_0 la vitesse du palet quand il redescend et v'_0 sa norme. On a

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_0'^2 \quad \text{et} \quad W_{B \rightarrow O}(\vec{P}) + W_{B \rightarrow O}(\vec{R}) = mg \sin(\alpha)d$$

On en déduit que

$$v_0'^2 = \sqrt{2g \sin(\alpha)d} \quad \text{d'où} \quad v'_0 = \sqrt{v_0^2} = v_0$$

On trouve donc la vitesse quand le palet repasse en O : $\vec{v}'_0 = -v_0 \vec{e}_x$.

2. On a maintenant $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T_x \vec{e}_x + N_z \vec{e}_z$. On cherche $W_{O \rightarrow B'}(\vec{T})$. Pour déterminer ce travail, il est indispensable de connaître l'expression de $\vec{T}$. On y accède par application de la RFD à M dans $(\mathcal{R})$. Par projection sur $\vec{e}_z$ on trouve que $N_z = \vec{N} \cdot \vec{e}_z = mg \cos(\alpha)$ d'où $\|\vec{N}\| = |N_z| = mg \cos(\alpha)$ et, tant qu'il y a glissement, $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\| = \mu mg \cos(\alpha)$. Les frottements sont ici résistants et, pendant la phase de montée, ils sont donc orientés selon $-\vec{e}_x$. Finalement, $\vec{T} = -\mu mg \cos(\alpha) \vec{e}_x$. On en déduit

$$W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) = \int_O^B \vec{T} \cdot d\vec{OM} = -\mu mg \cos(\alpha) \int_{x(O)}^{x(B')} dx$$

et

$$W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) = -\mu mg \cos(\alpha)(x(B') - x(O))$$

3.

$$\Delta E_c = W_{O \rightarrow B'}(\vec{P}) + W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg \sin(\alpha)d' - \mu mg \cos(\alpha)d'$$

et finalement

$$d' = \frac{v_0^2}{2g(\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha))} < d$$

4. Par application du théorème de l'énergie mécanique au point M dans $(\mathcal{R})$:

$$\Delta E_m = W_{O \rightarrow B'}(\vec{T}) = -\mu mg \cos(\alpha)d'$$

Finalement

$$\Delta E_m = \frac{-\mu mv_0^2 \cos(\alpha)}{2(\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha))} < 0$$

Une partie de l'énergie mécanique s'est dissipée en raison des frottements résistants.

5. En B' le palet s'arrête, on a donc en B' , $\dot{x}(t_{B'}) = 0$. Pour savoir si le palet repart vers le bas après s'être arrêté, il faut traduire le fait que, s'il repart, alors la coordonnée de son vecteur vitesse le long de l'axe (Ox) devient négative, c'est-à-dire que $\dot{x}(t > t_{B'}) < 0$. S'il repart c'est donc que $\dot{x}$ est décroissante puisque sa valeur passe de zéro à une valeur négative. Cela se traduit mathématiquement par $\forall t > t_{B'}, \ddot{x} < 0$.

On applique la relation fondamentale de la dynamique au point M dans $(\mathcal{R})$, et on la projette sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$, on obtient :

$$\forall t > t_{B'} \begin{cases} \text{sur } \vec{e}_x : m\ddot{x} = T_x - mg \sin(\alpha) \\ \text{sur } \vec{e}_z : 0 = N_z - mg \cos(\alpha) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

On en déduit rapidement que $N_z = mg \cos(\alpha)$.

D'autre part, si le palet repart, il va vers le bas et les frottements résistants sont donc vers le haut : $T_x > 0$ et $\|\vec{T}\| = T_x$. Et s'il repart, c'est qu'il glisse, donc $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\| = |N_z|$. Finalement, si le palet repart vers le bas, $T_x = mg \cos(\alpha)$. On a donc, si le palet repart

$$\forall t > t_{B'}, m\ddot{x} = \mu mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha) > 0 \quad \text{d'où} \quad \tan(\alpha) > \mu$$

L'angle minimal pour que le palet reparte vers le bas est

$$\boxed{\alpha_0 = \arctan(\mu)} \quad : \text{ si } \alpha > \alpha_0, \text{ le palet repart vers le bas}$$

6. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique ou le théorème de l'énergie mécanique pour l'aller-retour, on trouve

$$\boxed{v'_0 = v_0 \sqrt{\frac{\tan(\alpha) - \mu}{\tan(\alpha) + \mu}} \quad \text{d'où} \quad \vec{v}'_0 = -v_0 \sqrt{\frac{\tan(\alpha) - \mu}{\tan(\alpha) + \mu}} \vec{e}_x}$$

Remarque : compte tenu du domaine de définition de la racine carrée, l'expression précédente n'est possible que si $\tan(\alpha) - \mu > 0$, condition qui est bien vérifiée si le palet repart.

Bilan global d'énergie mécanique :

$$\boxed{\frac{\Delta E_m}{O \rightarrow B' \rightarrow O} = \frac{-\mu m v_0^2 \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)} < 0}$$