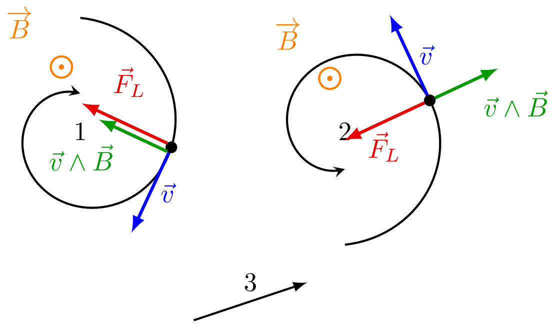
Correction MI – TD 4

Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, uniformes et stationnaires

I - Chambre à bulles

1. Questions de cours :
   (a) $||\vec{B}|| = 50\,\mu\text{T}$.
   (b) On a $P = m\,\vec{g}$ et $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. En supposant $\vec{v} \perp \vec{B}$, on en déduit $\boxed{\dfrac{F_L}{P} = \dfrac{|q|vB}{mg}}$.
   A.N. : $\frac{F_L}{P} = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\times5\times50\cdot10^{-6}}{9{,}1\cdot10^{-31}\times10} \approx \frac{4}{9}10^7 \approx 10^6$.
   Dans la plupart des situations, le poids est donc négligeable devant la force magnétique pour un électron.
   (c) On applique le théorème de la puissance cinétique : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_L) = \vec{F}_L\cdot\vec{v} = (q\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}$. Or $(\vec{v}\wedge\vec{B}) \perp \vec{v}$ donc $\mathcal{P}(\vec{F}_L) = 0$, soit $E_c = \text{cste}$. On en déduit $v = ||\vec{v}|| = \text{cste}$: le mouvement est uniforme.
   (d) On se place dans un repère cylindrique $(\vec{e}_r,\, \vec{e}_\theta,\, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ colinéaire et de même sens que $\vec{B}$: $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Si le mouvement est circulaire de rayon R, on a $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$. Comme le mouvement est uniforme $v = R|\dot{theta}| = \text{cste} = v_0$ soit $\dot{\theta} = \text{cste}$ et $\ddot{\theta} = 0$. Soit $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r$. De plus $\vec{F}_L = q\vec{v}\wedge\vec{B} = qv_0\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z = qBv_0\vec{e}_r$. En appliquant la RFD $m\vec{a} = \vec{F}_L$, on en déduit $\boxed{R = \dfrac{mv_0}{|q|B}}$.
   (e) On a $\forall t,\ v = R|\dot{\theta}| = v_0$ soit $|\dot{\theta}| = \frac{|q|B}{m}$. On reconnait la pulsation synchrotron ω_c.
   Finalement $\boxed{\dot{\theta} = \pm\omega_c = \pm\dfrac{|q|B}{m}}$
2. La concavité de la trajectoire donne l'orientation de l'accélération $\vec{a}$ et donc de la force de Lorentz $\vec{F}_L$. De plus le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. On connait les orientations de $\vec{v}$ et $\vec{B}$, on en déduit celle de $\vec{v}\wedge\vec{B}$.

   En comparant avec celle de $\vec{F}_L$, on en déduit le signe de la charge. dans notre cas :
   — Trajectoire 1 : $q > 0$
   — Trajectoire 2 : $q < 0$
   — Trajectoire 3 : trajectoire rectiligne et uniforme. Soit $\vec{F}_L = 0$. Or $\vec{v}\wedge\vec{B} \neq \vec{0}$ donc $q = 0$.



3. Lors de leur passage dans le liquide les particules décélèrent. Or $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ donc le rayon diminue progressivement.

II - Cyclotron

1. Mouvement dans un « dees »
   (a) Dans le « dee », seule la composante magnétique de la force de Lorentz intervient, on a donc $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Pour un proton $q = +e > 0$, la force en O est dans le plan du schéma, dirigée vers le bas.
   (b) Démonstration identique à celle de l'exercice précédent.
   (c) Démonstartion identique à celle de l'exercice précédent. Pour $q = e$, on obtient : $\boxed{R_0 = \dfrac{mv_0}{eB}}$.
   (d) Le proton parcourt un demi-cercle de rayon R_0 à la vitesse uniforme v_0. Le temps de parcours est donc $\boxed{t = \dfrac{\pi R_0}{v_0} = \dfrac{\pi m}{eB}}$, qui est indépendant de v_0. A.N : $t = \frac{\pi \times 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 0{,}1} = 3{,}28 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$.
   (e) Le mouvement est circulaire uniforme.
2. Mouvement dans l'intervalle entre les« dees »
   (a) On veut que la force électrique de Lorentz qui s'applique sur le proton entre les « dees » soit maximale, colinéaire et de même sens que le vecteur vitesse du proton. Il faut donc que l'intensité du champ électrique soit maximale à chaque passage dans l'intervalle étroit mais change de sens selon qu'on passe du « dee 1 » au « dee 2 » ou l'inverse. Il faut donc que la demi-période de la tension alternative générant le champ électrique soit égale au temps de passage t dans un « dee » (en négligeant le temps passé dans l'intervalle). On a alors $\frac{1}{2f} = t$ soit $\boxed{f = \dfrac{eB}{2\pi m}}$. A.N : $f = 1{,}52\,\mathrm{MHz}$.
   (b) On applique le théorème de l'énergie mécanique. La seule force s'appliquant dans l'intervalle étant la force de Lorentz, on a : $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$ avec $E_p = qV$. Si on considère que la tension est constante et maximale lors du passage du proton dans l'intervalle $\Delta E_p = eU_M$. Soit $\boxed{\Delta E_c = eU_M}$. A.N. $\Delta E_c = 2\,\mathrm{keV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^3 = 3{,}2 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}$.
   (c) Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.
3. Mouvement dans le cyclotron
   (a) À chaque passage dans l'intervalle, l'énergie cinétique, et donc la vitesse, augmente. Comme $R = \frac{mv}{eB}$, le rayon augmente également.
   (b) Avec une vitesse d'injection pratiquement nulle et une vitesse finale v_e, la variation totale d'énergie cinétique est $\Delta E_{c,tot} = \frac{1}{2}mv_e^2$. À chaque tour, elle augmente de $2\Delta E_c$, le nombre de tours nécessaire est donc $\boxed{n = \dfrac{\Delta E_{c,tot}}{2\Delta E_c} = \dfrac{mv_e^2}{4eU_M}}$. A.N. : $n = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \times (2 \cdot 10^7)^2}{4 \times 3{,}2 \cdot 10^{-16}} = 522$.
   (c) Au moment de leur éjection, le rayon est $R_e = \frac{mv_e}{eB}$. A.N. : $R_e = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \times 2 \cdot 10^7}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 0{,}1} = 2{,}09\,\mathrm{m}$.

III - Modélisation d'un oscilloscope analogique à tube cathodique

1. Questions préliminaires :
   (a) $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$.
   (b) $\boxed{E_p = qV}$
   (c) $\mathrm{d}E_p = -\delta W = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$. Pour un problème unidimensionnel selon x $\boxed{\vec{F}} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x$ [1].
   (d) On en déduit $q\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x = -\frac{\mathrm{d}(qV)}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x$ soit $\boxed{\vec{E} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x}$ [2].
2. — Pour que la particule soit accélérée par la première paire de plaques, il faut $\vec{a}\cdot\vec{e}_x > 0$ soit $\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{e}_x = \frac{q\vec{E}}{m}\cdot\vec{e}_x > 0$ d'où $-\frac{q}{m}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} > 0$. Comme $q = -e < 0$, il faut $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} > 0$ et donc $\boxed{U_x > 0}$.
   — De même, il faut au niveau de la seconde paire de plaques $\vec{a}\cdot\vec{e}_z > 0$. On en déduit $\boxed{U_z > 0}$.
3. On applique le théorème de l'énergie mécanique à la particule entre O, point d'entre dans les plaques et H point de sortie : $\Delta_{OH}E_m = \Delta_{OH}E_c + \Delta_{OH}E_p = 0$ avec $\Delta_{OH}E_c = \frac{1}{2}mv^2(H) - \frac{1}{2}mv_0^2$ et $\Delta_{OH}E_p = qv(H) - qV(O) = -eU_x$. Soit $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2eU_x}{m}}}$.
4. (a) Entre la deuxième paire de plaques, on a $\forall t$, $m\vec{a} = q\vec{E} = -e\frac{U_z}{d}\vec{e}_z$. On reconnait le mouvement d'un point matériel soumis à un vecteur accélération constant. En appliquant les conditions initiales $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$, on trouve finalement $\vec{v}(t) = v_0\,\vec{e}_x + \frac{eU_z}{md}t\,\vec{e}_z$ et

$$\forall t, \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & v_0 t \\ z(t) & = & \frac{1}{2}\frac{eU_z}{md}t^2 \end{array}\right.$$

   (b) La particule sort des plaques pour $x = \ell$ soit en t_ℓ tel que $x(t_\ell) = \ell$ et donc $t_\ell = \frac{\ell}{v_0}$. On a alors $\boxed{z_\ell = z(t_\ell) = \dfrac{1}{2}\dfrac{eU_z}{md}\dfrac{\ell^2}{v_0^2}}$. La vitesse vaut alors $\vec{v}(t_\ell) = v_0\,\vec{e}_x + \frac{eU_z}{md}\frac{\ell}{v_0}\,\vec{e}_z$. Le vecteur vitesse, et donc la trajectoire, fait un angle α avec l'horizontale tel que $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{v_z}{v_x} = \dfrac{eU_z\ell}{mdv_0^2}}$
   (c) Après les plaques, $\vec{E} = \vec{0}$ donc $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{a} = \vec{0}$. Le mouvement est rectiligne uniforme. L'équation de la trajectoire est celle d'une droite de pente α : $z(x) = z(x=\ell) + \tan\alpha(x-\ell)$ d'où

$$\forall x > \ell,\ z(x) = \frac{eU_z\ell}{mdv_0^2}\left(x - \frac{\ell}{2}\right)$$

   Au niveau de l'écran $x = D + \frac{\ell}{2}$, on a donc $\boxed{z_D = \dfrac{eU_z}{mdv_0^2}\ell D}$

   En remarquant que $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_x}{m}}$, on peut écrire $\frac{mv_0^2}{e} = 2U_x$. On obtient $\boxed{z_D = \dfrac{1}{2}\dfrac{U_z}{U_x}\dfrac{\ell D}{d}}$, indépendant de m et de e.
5. $\boxed{U_z = 2U_x\dfrac{z_D d}{\ell D}}$. A.N. : $U_z = 2\times 3\cdot 10^3 \times \frac{1\times 1}{5\times 20} = 60\,\mathrm{V}$.

1. On obtient évidemment le même résultat en partant de $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}E_p$
2. Relation que l'on peut généraliser par $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$.