

## Correction MI – TD 5

# Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

## I - Mouvements des planètes

La relation utile est la troisième loi de Kepler. Cf cours MI-F pour la démonstration. Pour une planète en trajectoire circulaire autour du Soleil de rayon  $r$  et de période de révolution  $T$ , on a  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$  où  $M_S$  est la masse du Soleil. On admet que pour une trajectoire elliptique dont le demi grand-axe est  $a$ , on a  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ . Si on note  $a_T, T_T$  et  $a_M, T_M$  les demi grand-axes et périodes de révolution respectivement de la Terre et de Mars, on a donc :  $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3}$ . On en déduit :

$$T_M = \sqrt{\frac{a_M^3}{a_T^3}} T_T.$$

Le demi-grand axe est égal à la moyenne de l'aphélie et de la périhélie. Pour la Terre, on a donc  $a_T = 1,50 \cdot 10^8$  km et on sait que  $T_T = 365,25$  jours =  $3,16 \cdot 10^7$  s d'où :  $T_M = 59,1 \cdot 10^6$  s soit environ six cent quatre-vingts jours.

## II - Modèle classique de trou noir

1. En coordonnées sphériques de centre  $O$ , on a

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r.$$

Le travail élémentaire de cette force est  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$  avec  $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$ . Soit  $\delta W = -\mathcal{G} m_0 m \frac{dr}{r^2} = \mathcal{G} m_0 m d\left(\frac{1}{r}\right) = -dE_p$  avec  $E_p = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r} + K$ . En choisissant  $E_p(\infty) = K = 0$ , on retrouve

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}.$$

2. On applique le théorème du moment cinétique en  $O$  :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = (r\vec{e}_r) \wedge \left(-\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r\right) = \vec{0}$$

Le moment cinétique étant stationnaire, on en déduit que le mouvement est plan, contenu dans le plan  $(O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$ . On se place alors en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$  colinéaire à  $\vec{L}_O$ , on a alors  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  et  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ , soit  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ .

Comme  $\vec{L}_O$  est stationnaire, on en déduit que la quantité  $C = r^2 \dot{\theta}$  l'est aussi (loi des aires).

3.  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}$  avec  $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$ .

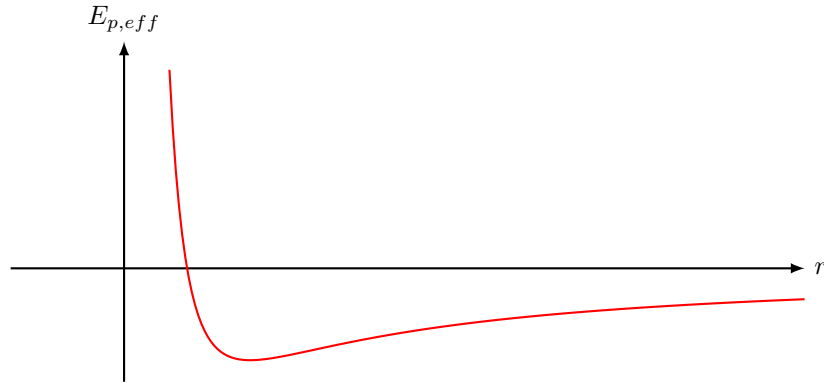
On peut donc écrire  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$  avec

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}.$$

1.

4. Pour  $r \rightarrow 0^+$ , le terme en  $\frac{1}{r}$  prédomine et  $E_{p,\text{eff}} \rightarrow +\infty$  et pour  $r \rightarrow +\infty$ , le terme en  $\frac{1}{r^2}$  prédomine et  $E_{p,\text{eff}} \rightarrow 0^-$ . L'allure de l'énergie potentielle effective est donc :

1. Il faut se rappeler qu'il s'agit d'une « fausse » énergie potentielle, qui contient un terme issu de l'énergie cinétique. En particulier, la présence de la constante des aires  $C$  montre qu'elle dépend des conditions initiales.



Le point a une trajectoire non bornée, et est donc dans un état de diffusion, si  $E_m \geq 0$

5. À la limite de l'état de diffusion,  $E_m = 0$ . À la surface de l'astre, on a alors  $r = R$  et  $v = v_{lib}$  soit

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \mathcal{G}\frac{m_0m}{R}. \text{ On trouve finalement } v_{lib} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_0}{R}}.$$

6. Par définition du rayon de Schwarzschild,  $v_{lib} = c$  pour  $R = R_S$ . On en déduit que l'astre est un trou noir si

$$R < R_S = \frac{2\mathcal{G}m_0}{c^2}$$

7. A.N. :  $R_{S,S} = 3,0 \text{ km}$  et  $R_{S,T} = 9,0 \text{ mm}$ . La masse volumique est donnée par  $\rho = \frac{m_0}{V} = \frac{m_0}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ .

$$\text{A.N. : } \rho_S = 7,7 \cdot 10^{19} \text{ km/m}^3 \text{ et } \rho_T = 8,5 \cdot 10^{30} \text{ km/m}^3$$

8. On a appliqué la force de gravitation à un photon, qui est une particule qui n'a pas de masse. On a également utilisé des résultats de la mécanique newtonienne à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui ne peuvent se traiter rigoureusement qu'en utilisant la mécanique relativiste.

### III - Lancement d'un satellite

#### III.1 - Étude préliminaire

1. On a  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$  et  $\overrightarrow{F}(M) = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$

2. On a :

$$W(\overrightarrow{F})_{M \rightarrow M_\infty} = \int_M^{M_\infty} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_r^\infty -\frac{\alpha}{r^2} dr = -\frac{\alpha}{r}$$

Soit la fonction de la position uniquement,  $E_p(r) = -\frac{\alpha}{r} + E_{p,\infty}$ . On constate que :

$$\Delta_{M \rightarrow M_\infty} E_p = (E_{p,\infty} - E_p(r)) = \frac{\alpha}{r} = -W(\overrightarrow{F})_{M \rightarrow M_\infty}$$

ce qui prouve que le travail ne dépend pas du chemin suivi.

3. Théorème du moment cinétique en  $O$ , appliqué à  $M$ , dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}(M) = (r\vec{e}_r) \wedge \left(-\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r\right) = \vec{0}$$

donc le moment cinétique  $\overrightarrow{L}_O(M)$  est stationnaire. Étant donné que le moment cinétique est orthogonal en tout point à la fois au vecteur-position  $\overrightarrow{OM}$  et au vecteur-vitesse  $\vec{v}$ , il est toujours orthogonal au plan  $(\overrightarrow{OM}, \vec{v})$ . La trajectoire est donc toujours localement contenue dans un plan orthogonal au moment cinétique et passant par  $O$ . Puisque le moment cinétique est stationnaire, on en déduit que ce plan est toujours le même et que la trajectoire est plane.

4. On a  $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$  et  $\vec{v}_M = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$  donc  $\overrightarrow{L}_O = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$  et  $\rho\dot{\varphi} = \frac{\|\overrightarrow{L}_O\|}{m\rho}$  puis  $\vec{v}_M = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \frac{\|\overrightarrow{L}_O\|}{m\rho}\vec{e}_\varphi$ .

$$5. E_c = \frac{1}{2}mv_M^2 = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}_O\|^2}{m\rho^2} \text{ et } E_m = E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2}_{E_c \text{ radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}_O\|^2}{m\rho^2}}_{E_c \text{ orthoradiale}} - \frac{\alpha}{\rho} + E_{p,\infty}$$

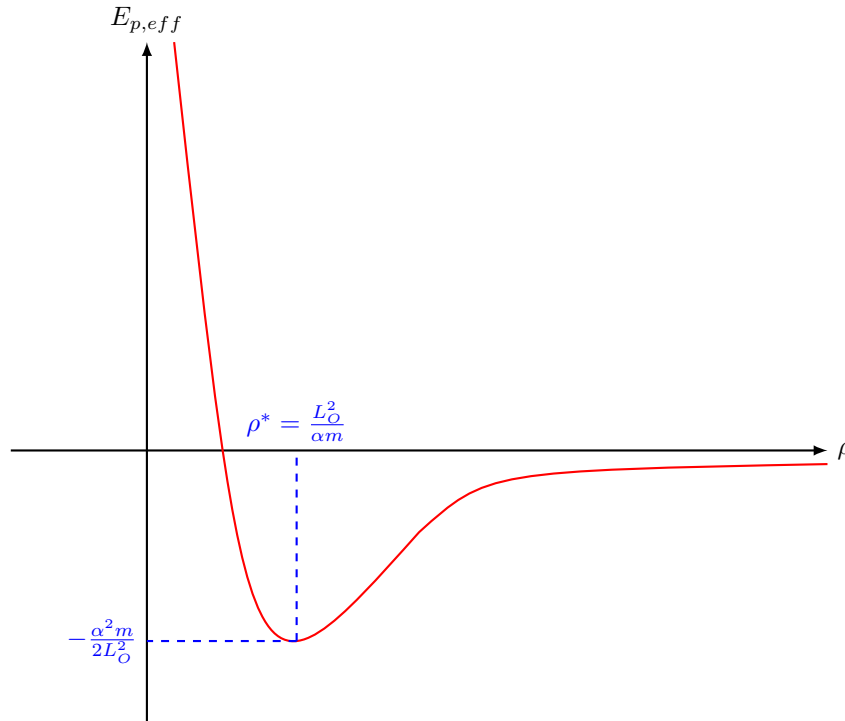
L'énergie potentielle effective est la partie de l'énergie mécanique qui correspond à la somme de l'énergie cinétique orthoradiale et de l'énergie potentielle. Cette énergie potentielle effective ne dépend que de  $\rho$ . On a donc :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}_O\|^2}{m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} + E_{p,\infty} = \frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}_O\|^2}{m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$$

$$6. \lim_{\rho \rightarrow \infty} E_{p,\text{eff}} = E_{p,\infty} = 0; \lim_{\rho \rightarrow 0} E_{p,\text{eff}} = +\infty; \frac{dE_{p,\text{eff}}}{d\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\|\vec{L}_O\|^2}{m\rho^3}.$$

En notant  $\rho^*$  le rayon pour lequel la dérivée de  $E_{p,\text{eff}}$  est nulle, on a :

$$\left(\frac{dE_{p,\text{eff}}}{d\rho}\right)_{\rho=\rho^*} = 0 \implies \rho^* = \frac{\|\vec{L}_O\|^2}{\alpha m} \text{ et } E_{p,\text{eff}}(\rho^*) = E_{p,\text{eff},\text{min}} = \frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}_O\|^2}{m\rho^{*2}} - \frac{\alpha}{\rho^*} = -\frac{\alpha^2 m}{2\|\vec{L}_O\|^2} < 0$$



### III.2 - Calculs de vitesses

On considère que le satellite est lancé tel que décrit précédemment.

1. Étant donné que  $E_{p,\infty} = 0$ , le satellite échappe à la gravitation terrestre si  $E_m \geq 0$ . À la distance  $\rho_0$ , le cas limite est obtenu pour la vitesse  $v_e$  telle que  $E_m = 0$  d'où :

$$0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{\alpha}{\rho_0}$$

et

$$v_e = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\rho_0}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{\rho_0}}$$

2. Application numérique :  $v_e = 633 \cdot 10^1 \text{ m s}^{-1} = 6,33 \text{ km s}^{-1}$ .
3. Une démonstration utilisant la RFD a été faite en cours. On propose ici un raisonnement graphique utilisant la représentation de  $E_{p,\text{eff}}(\rho)$ .

Étant donné que  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + E_{p,\text{eff}}$  et que  $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 \geq 0$ , on peut affirmer que les trajectoires possibles sont contraintes par la condition  $E_m \geq E_{p,\text{eff}}$ . En traçant sur la courbe de  $E_{p,\text{eff}}$  la valeur de  $E_m$  pour

une trajectoire donnée, on détermine ainsi les valeurs de rayon accessible à une trajectoire donnée. Pour une trajectoire circulaire, il n'existe qu'une seule valeur du rayon : cela correspond obligatoirement à une énergie mécanique égale à l'énergie potentielle effective minimale :  $E_m = E_{p,eff,min} = -\frac{\alpha^2 m}{2\|\vec{L}_O\|^2}$ .

D'autre part, pour une distance  $\rho_0$  et une vitesse  $v_c$ ,  $E_m = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\alpha}{\rho_0}$ . La condition  $E_m = E_{p,eff,min}$  se réécrit donc :

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\alpha}{\rho_0} = -\frac{\alpha^2 m}{2\|\vec{L}_O\|^2}$$

Or,  $\|\vec{L}_O\| = m\rho_0 v_c$  donc :

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{\alpha}{\rho_0} = -\frac{\alpha^2}{2m\rho_0^2 v_c^2}$$

donc

$$v_c^4 - 2\frac{\alpha}{m\rho_0}v_c^2 + \frac{\alpha^2}{m^2\rho_0^2} = \left(v_c^2 - \frac{\alpha}{m\rho_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{\alpha}{m\rho_0}} = \sqrt{\frac{GM_T}{\rho_0}}$$

4. Application numérique :  $v_c = 447 \cdot 10^1 \text{ m s}^{-1} = 4,47 \text{ km s}^{-1}$ .

5. Une démonstration utilisant la RFD a été faite en cours. On propose ici un raisonnement utilisant la loi des aires.

Pour tout mouvement à force centrale et conservative,  $\vec{L}_O(M)$  est stationnaire. Or  $\vec{L}_O(M) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ . On en déduit que  $\rho^2\dot{\varphi}$  est stationnaire (loi des aires). Pour une trajectoire circulaire on a, en plus,  $\rho$  stationnaire, donc  $\dot{\varphi}$  stationnaire donc  $\rho\dot{\varphi}$  stationnaire. Or  $\|\vec{v}_M\| = |\rho\dot{\varphi}|$ . Donc  $\|\vec{v}_M\|$  est stationnaire. CQFD.

6. On exprime de deux façons le périmètre  $\mathcal{P}$  du cercle décrit par le satellite quand il fait un tour complet en une durée  $T_c$ .

— géométrie :  $\mathcal{P} = 2\pi\rho_0$  ;

— cinématique :  $\mathcal{P} = \int_0^T v_c dt$  et puisque  $v_c$  est stationnaire (vitesse uniforme) :  $\mathcal{P} = v_c \int_0^T dt = v_c T_c$ .

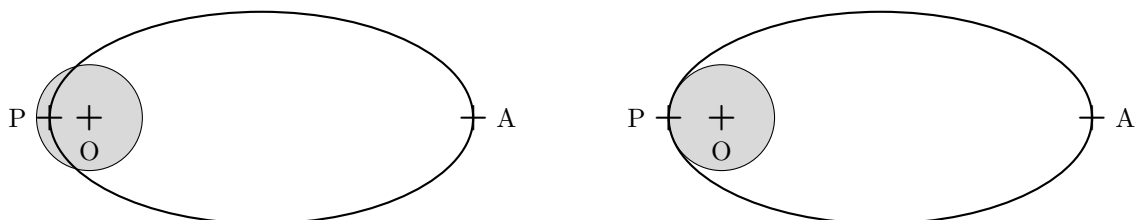
On en déduit :

$$T_c = \frac{2\pi\rho_0}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_0^3}{GM_T}}$$

A.N. :  $T_c = 28,1 \cdot 10^3 \text{ s} = 7,80 \text{ h}$

### III.3 - Conditions de lancement d'un satellite

- Partout, on peut écrire  $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ . Or, en  $A$  et en  $P$ , le rayon est extrémal donc sa dérivée est nulle :  $\dot{\rho} = 0$ , d'où, en  $A$  et en  $P$ ,  $\vec{v} = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ . Étant donné qu'en tout point  $\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho$  on a bien, en  $A$  et en  $P$  :  $\vec{OA} \perp \vec{v}_A$  et  $\vec{OP} \perp \vec{v}_P$
- On a  $\|\vec{L}_O(A)\| = \|m\vec{OA} \wedge \vec{v}_A\| = m\|\vec{OA}\|\|\vec{v}_A\|$  car  $\vec{OA} \perp \vec{v}_A$ . D'où  $\|\vec{L}_O(A)\| = m\rho_A v_A$ . De même :  $\|\vec{L}_O(P)\| = m\rho_P v_P$ . D'autre part, le moment cinétique est stationnaire donc  $\|\vec{L}_O(A)\| = \|\vec{L}_O(P)\|$  et, finalement,  $\rho_A v_A = \rho_P v_P$ . CQFD.
- La situation est la suivante : on lance le satellite à l'apogée  $A$  à la distance  $\rho_0$  avec la vitesse  $v_0$  et on cherche à déterminer la vitesse limite  $v_{0,min}$  telle que le périhélie est à une distance  $\rho_P = R_T$ . Si  $v_0 < v_{0,min}$ ,  $\rho_P < R_T$  et le satellite s'écrase sur Terre (figure de gauche ci-dessous). Pour  $v_0 = v_{0,min}$ ,  $\rho_P = R_T$  et le satellite frôle la surface de la Terre (figure de droite ci-dessous).



On a donc, en se plaçant dans le cas limite :

$$\begin{aligned}\rho_A &= \rho_0 \\ v_A &= v_{0,min} \\ \rho_P &= R_T\end{aligned}$$

$$\text{et toujours : } \rho_A v_A = \rho_P v_P$$

On en déduit :  $v_P = \frac{\rho_0}{R_T} v_{0,min}$ .

D'autre part, la conservation de l'énergie mécanique donne :  $\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{\alpha}{\rho_A} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{\alpha}{\rho_P}$  ce qui se traduit, dans le cas limite par

$$\frac{1}{2} m v_{0,min}^2 - \frac{\alpha}{\rho_0} = \frac{1}{2} m \left( \frac{\rho_0}{R_T} v_{0,min} \right)^2 - \frac{\alpha}{R_T}$$

ce qui mène à

$$v_{0,min} = \sqrt{2GM_T \left( \frac{R_T - \rho_0}{R_T \rho_0} \right) \frac{1}{1 - \left( \frac{\rho_0}{R_T} \right)^2}}$$

$$4. v_{0,min} = 311 \cdot 10^1 \text{ ms}^{-1} = 3,11 \text{ km s}^{-1}.$$

## IV - Expérience de Rutherford

- La particule  $\alpha$  étant chargée positivement, elle subit une force de Coulomb répulsive exercée par le noyau situé en  $O$  s'écrivant

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{noy}}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \vec{e}_r$$

. On peut bien mettre cette force sous la forme  $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$  avec  $K = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$ .

- On peut considérer que la particule  $\alpha$  n'est soumise qu'à l'interaction coulombienne, qui est une force conservative,  $E_m$  est donc une constante du mouvement. Initialement, la particule est à l'infini, où  $E_p = 0$

et est animée d'une vitesse  $v_0$  d'où  $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$ .

- La force coulombienne étant une force centrale centrée en  $O$ , sa droite d'action passe toujours par ce point. On en déduit que le moment de cette force par rapport à  $O$  est nul et donc, en appliquant le théorème du moment cinétique, que  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$ . Le moment cinétique par rapport à  $O$  est donc une constante du mouvement. Initialement  $\vec{L}_O(\infty) = \vec{OM}_\infty \wedge m\vec{v}_0 = m(\vec{OH} + \vec{HM}_\infty) \wedge \vec{v}_0 = m(\vec{OH} \vec{e}_x + b\vec{e}_y) \wedge (-v_0\vec{e}_x)$  soit  $\vec{L}_O = mbv_0\vec{e}_z$ .

En repérant la particule par ses coordonnées polaires, on a  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$  d'où

$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

- L'énergie mécanique est donnée par

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on peut remplacer  $\dot{\theta}$  par  $\frac{bv_0}{r^2}$ , ce qui donne

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + E_p^*(r) \quad \text{avec} \quad E_p^*(r) = \frac{mb^2v_0^2}{2r^2} + \frac{K}{r}$$

Cette fonction est l'énergie potentielle effective de la particule  $\alpha$ .

- En S, sa distance par rapport à  $O$  est minimale, on a donc  $\dot{r} = 0$ . L'énergie mécanique est alors

$$E_m = E_p^*(r_{min}) = \frac{mb^2v_0^2}{2r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}}.$$

L'énergie mécanique étant une constante du mouvement, on a  $E_{m,\infty} = E_{m,r_{min}}$  soit

$$\frac{mb^2v_0^2}{2r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

On multiplie cette équation par  $\frac{2r_{min}^2}{mv_0^2}$ , ce qui donne

$$r_{min}^2 - \frac{2K}{mv_0^2}r_{min} - b^2 = 0$$

Le discriminant est  $\Delta = \left(\frac{2K}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2 > 0$ , les deux racines sont alors

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{2K}{mv_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2} \right)$$

$r$  étant le rayon des coordonnées polaires, il est forcément positif. On ne garde donc que la racine positive et finalement

$$r_{min} = \frac{K}{mv_0^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2} \right)$$

6. En inversant la relation donnée dans l'énoncé, on trouve

$$b = \frac{K}{mv_0^2 \tan \frac{D}{2}} = \frac{K}{2E_m \tan \frac{D}{2}}$$

puis

$$r_{min} = \frac{K}{2E_m} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2} \right) = \frac{K}{2E_m} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tan \frac{D}{2}}\right)^2} \right)$$

Or  $1 + \left(\frac{1}{\tan \frac{D}{2}}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 \frac{D}{2}}{\sin^2 \frac{D}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{D}{2} + \cos^2 \frac{D}{2}}{\sin^2 \frac{D}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{D}{2}}$

Comme  $\sin \frac{D}{2} > 0$ , on obtient finalement :  $r_{min} = \frac{K}{2E_m} \left( 1 + \frac{1}{\sin \frac{D}{2}} \right)$  et alors  $r_{min,min} = \frac{K}{E_m}$ .

7. D'après la relation de la question 5.,  $r_{min}$  est minimum lorsque  $b = 0$ , ce qui mène à  $\tan \frac{D}{2} \rightarrow \infty$  et donc  $D = 180^\circ$ .

8. On a  $K = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} = 3,62 \cdot 10^{-26} \text{ m J}^{-1}$  et  $E_m = E_{c,\infty} = 5 \text{ MeV} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

— pour  $D_1 = 60^\circ$ , on trouve  $b_1 = 3,9 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  puis  $r_{min,1} = 6,8 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  ;

— pour  $D_2 = 180^\circ$ , on trouve  $b_2 = 0$  puis  $r_{min,2} = r_{min,min} = 4,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  ;

Si la particule peut arriver jusqu'en  $r_{min}$  avant de faire demi-tour, c'est que le noyau est un peu plus loin, donc plus petit que  $r_{min}$ .

On en déduit qu'un noyau d'or a une taille de l'ordre de  $10^{-14} \text{ m}$ , ce qui est bien plus petit que la taille de l'atome ( $10^{-10} \text{ m}$ ) connue par Rutherford.

## V - Stabilité d'une trajectoire circulaire dans un champ de force central

1. On applique la RFD sur l'objet en mouvement :  $m\vec{a} = \vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ . Le mouvement est plan, on se place en coordonnées polaires et pour le mouvement circulaire on a  $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ . On en déduit  $\dot{\theta} = 0$  (le

mouvement est uniforme) et  $m\frac{v_0^2}{r_0} = -F(r_0)$ .

2. La constante aréolaire est définie par  $C = r^2\dot{\theta}$ . Cette grandeur étant stationnaire  $C = r^2(0)\dot{\theta}(0)$  soit  $C = r_0v_0$ .

3. L'accélération en coordonnées polaires pour un mouvement plan quelconque est

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

L'équation du mouvement, en projection sur le vecteur radial, donne :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

Comme  $r^2\dot{\theta} = C$ , on obtient  $\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m}$  soit

$$\ddot{r} - \frac{(r_0v_0)^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m}$$

4. On pose  $r(t) = r_0(1 + \varepsilon(t))$  et on linéarise l'équation précédente au premier ordre non nul :

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) &= r_0\ddot{\varepsilon}(t) \\ \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3(1+\varepsilon)^3} = \frac{1}{r_0^3}(1 - 3\varepsilon + \dots) \\ \frac{F(r)}{m} &= \frac{F(r_0+r_0\varepsilon)}{m} = \frac{F(r_0)}{m} + \frac{F'(r_0)}{m}r_0\varepsilon + \dots \end{cases}$$

En notant que  $\frac{F(r_0)}{m} = -\frac{v_0^2}{r_0}$ , on voit que les termes constants, d'ordre 0, s'annulent et il reste

$$r_0\ddot{\varepsilon} + \frac{3v_0^2}{r_0}\varepsilon = \frac{F'(r_0)}{m}r_0\varepsilon \quad \text{soit} \quad \ddot{\varepsilon} - \frac{1}{m} \left( \frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) \right) \varepsilon = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique, synonyme d'oscillations de  $r$  autour de  $r_0$  et donc d'une évolution ultérieure du système autour du cercle initial, à condition que le coefficient devant le terme en  $\varepsilon$  soit positif. Il faut donc

$$\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0$$

5. Pour un champ de force de la forme  $F(r) = \frac{-k}{r^n}$ , on a  $F'(r) = \frac{nk}{r^{n+1}}$ . La condition précédente s'écrit donc  $\frac{-3k}{r_0^{n+1}} + \frac{nk}{r_0^{n+1}} > 0$  soit  $k(n-3) < 0$ .

Pour avoir une trajectoire circulaire, il faut déjà avoir un champ attractif, soit  $k > 0$ , de sorte que la condition de stabilité est  $n < 3$ . Dans le cas de la gravitation,  $n = 2$ , et ainsi la trajectoire circulaire apparaît stable : ouf!