MI – TD 6

Moments cinétiques et mouvements d'un solide

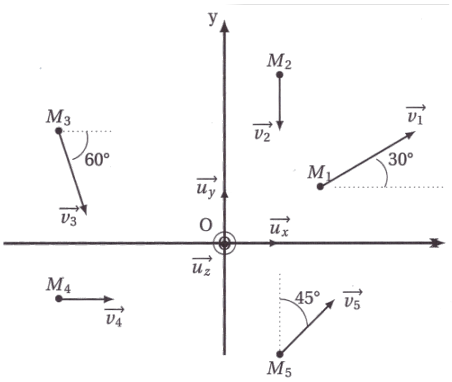
Méthodes, compétences et savoirs-faire

Cahier d'entraînement

Fiche d'entraînement n°12 – Moment cinétique – Exercices 12.1 à 12.6 et 12.10 à 12.12

1 - Moments cinétiques

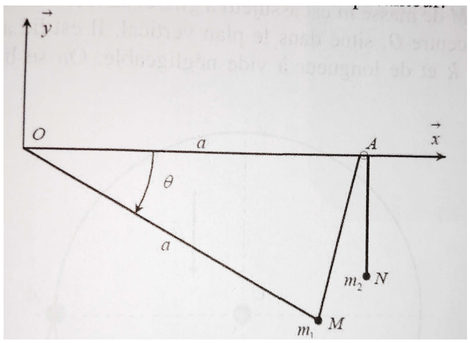
On considère dans le plan (xOy) cinq points matériels de masse $m = 100\,\text{g}$ dont les coordonnées, exprimées en mètres, sont $M_1(\sqrt{3}\,;\,1)$, $M_2(1\,;\,2)$, $M_3(-1,5\,;\,2)$, $M_4(-3\,;\,-1)$ et $M_5(1\,;\,-2)$.
Les normes de leurs vitesses dans le référentiel d'étude $(\mathcal{R})$ sont : $v_1 = 4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$; $v_2 = 1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$; $v_3 = 2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$; $v_4 = 1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$; $v_5 = 2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
Les orientations des vecteurs-vitesses sont données sur la figure suivante :



1. Les cinq points peuvent-ils constituer un solide ? Justifier.
2. Déterminer les moments cinétiques en O dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de chaque point.
3. Déterminer les moments cinétiques par rapport aux axes (Ox) et (Oy) dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de chaque point. Commenter.
4. Déterminer les moments cinétiques par rapport à l'axe (Oz) dans le référentiel $(\mathcal{R})$ de chaque point. Commenter.

I - Système en équilibre

Le référentiel $\mathcal{R}$, considéré comme galiléen, est rapporté au repère orthonormé (O, x, y, z). On considère un fil inextensible et sans masse, fixé en O et passant en A, fixe dans $\mathcal{R}$, sur une poulie de très petites dimensions. On fixe sur ce fil une masse m_1 au point M distant de a du point O, de sorte que le triangle OAM soit isocèle, et une masse m_2 à l'extrémité N du fil.
On note $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{e}_x$ et $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$.

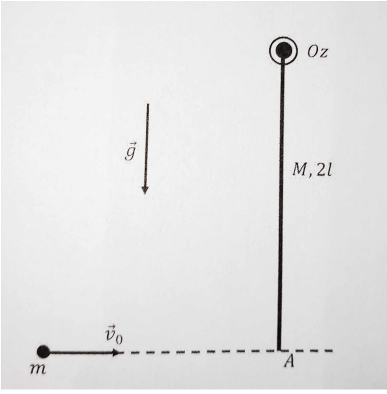


1. Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en O (le seul angle devant intervenir dans ces expression sera l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$).

2. Appliquer le théorème du moment cinétique au point O à la masse m_1. En déduire une condition sur m_1 et m_2 pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer quand il existe l'angle d'équilibre θ_e en fonction de m_1 et m_2.

II - Mouvement rotatif ou mouvement pendulaire

On considère un pendule pesant constitué d'une tige OA, de masse M, de longueur 2ℓ et de moment d'inertie $I = {}^{4M\ell^2}/_3$ par rapport l'axe horizontal (Oz) (voir figure-ci-contre). Un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire à OA vient s'incruster dans la tige au niveau de son extrémité A.
La tige, qui peut trourner autour de l'axe (Oz) grâce à une liaison pivot parfaite, est initialement au repos.



1. En utilisant et en la justifiant la conservation du moment cinétique total par rapport à l'axe Oz au moment de l'incrustation, déterminer la vitesse angulaire ω_0 de la tige autour de cet axe juste après l'incrusation du point matériel dans la tige.
2. En utilisant un bilan énergétique, déterminer l'expression de l'angle maximal θ_{max} entre la tige et la verticale en fonction de m, g, ℓ et ω_0.
3. Montrer que, selon la valeur de v_0, le mouvement de la tige est pendulaire ou rotatif.

III - Énergétique d'un vélo

On considère un vélo suspendu par le cadre et dont on fait tourner de façon libre la roue avant. La roue est équilibrée, de façon à ce que son barycentre soit sur l'axe de rotation qui est fixe dans le référentiel terrestre. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. On modélise le frottement au niveau de l'axe par un couple de moment par rapport à l'axe supposé constant et noté C.

1. On lance la roue avec une vitesse angulaire initiale ω_0. On constate que la roue s'arrête au bout de N tours. En déduire C.
2. Proposer une démarche expérimentale permettant de vérifier si le moment du couple est bien constant et indépendant de la vitesse angulaire des roues.

On considère un vélo roulant, en ligne droite, à vitesse constante, sur une route horizontale, à la vitesse de $36\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Les roues roulent sans glisser sur le sol. Chaque roue est assimilable à un cerceau de section négligeable, de masse $m = 1{,}45 \cdot 10^3$ g et de diamètre $D = 67$ cm. La masse totale du vélo (cadre + roues + cycliste) est $m_{tot} = 79{,}1$ kg.

3. Si le référentiel terrestre est supposé galiléen, que peut-on dire du référentiel lié au vélo ?
4. Déterminer la vitesse angulaire de chacune des roues. Application numérique.
5. Calculer l'énergie cinétique de rotation de chaque roue dans le référentiel lié au cadre du vélo. Application numérique.
6. Calculer l'énergie cinétique totale du vélo dans le référentiel terrestre, c'est-à-dire l'ensemble de ses énergies cinétiques de rotation et de translation. Application numérique.

Le cycliste ne pédale plus et freine. Le vélo met 5,0 s à s'arrêter.

7. Calculer la puissance moyenne de la force de freinage. Application numérique.

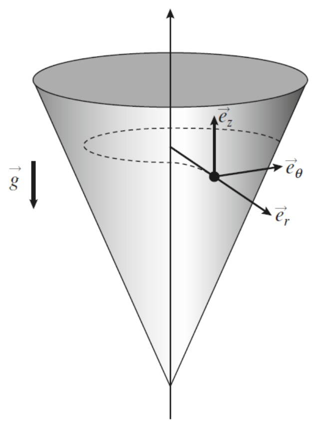
IV - Machine tournante

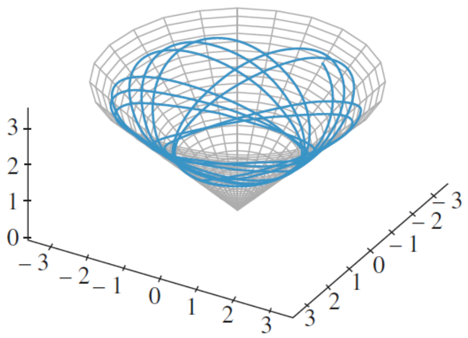
Une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe est soumise à l'action d'un couple moteur de moment Γ_0 constant. On suppose que l'ensemble des forces de frottement exerce un couple de la forme $-k\omega$.

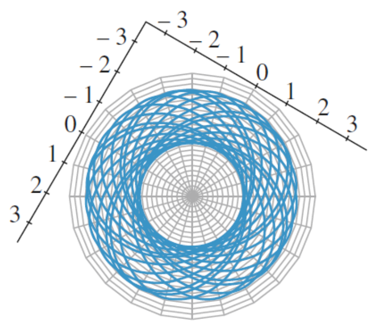
1. Étudier le mouvement de la machine en supposant qu'elle est initialement immobile. Identifier la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système.
2. **Micro-coupure** : on suppose qu'une micro-coupure coupe instantanément le couple moteur, le régime permanent ayant été atteint.
   (a) Quelle est alors l'équation du mouvement durant cette phase ? Déterminer l'évolution de ω en fonction du temps.
   (b) On considère que l'on peut accepter une diminution de 10 % maximum de la vitesse angulaire par rapport à ω_0 durant cette phase du mouvement. Quelle doit être la durée maximale T de la coupure pour que cette condition soit vérifiée ?
3. **Influence d'une vibration** : en raison de vibrations indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la fréquence $\Omega/2\pi$ avec un taux de modulation η : $\Gamma(t) = \Gamma_0(1 + \eta \cos \Omega t)$.
   (a) Reprendre l'étude du mouvement en établissant l'équation différentielle définie par la fonction $\varepsilon(t)$ telle que : $\omega(t) = \omega_0[1 + \varepsilon(t)]$.
   (b) Montrer que, au bout d'un temps suffisant, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme : $\varepsilon(t) = \alpha \cos(\Omega t - \Psi)$. Déterminer les constantes α et Ψ en fonction de η, Ω et τ .
   (c) La machine est-elle plus sensible aux perturbations haute ou basses fréquence ?
4. À l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant d'inertie.

V - Particule dans un cône

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans un cône d'axe (Oz) vertical et de demi-angle au sommet valant α. À l'instant initial, il est lancé à l'altitude z_0 avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_{\theta(t=0)}$ (voir figure ci-contre).
On observe alors l'évolution suivante (voir figure ci-dessous), représentée pour une vue oblique et pour une vue de dessus de l'évolution du point M.







1. Pourquoi le point M contourne-t-il l'axe (Oz) en tournant toujours dans le même sens, et sans jamais tomber au fond du cône ?
2. En exprimant deux constantes du mouvement, justifier l'évolution du point entre deux altitudes extrêmes.
3. La trajectoire pourrait-elle être circulaire ?