

OS – Chapitre C

Approximation de Gauss et applications

I - Définitions, généralités

I.1 - Système optique

Un système optique est un ensemble de milieux transparents séparés par des surfaces réfractantes (c'est-à-dire qui dévient la lumière) ou réfléchissantes.

Il existe des systèmes :

- **dioptriques** ou systèmes en transmission : seulement composés de dioptres réfractants,
- **catoptriques** ou systèmes en réflexion : seulement composés de miroirs,
- **catadioptriques** : composés de dioptres réfractants et de miroirs.

On remarquera que cette classification dépend de l'usage qu'on veut faire du système. Par exemple, une même surface vitrée peut être regardée comme réfractante quand on regarde au travers d'elle ou réfléchissante si elle est utilisée comme miroir.

Le système optique est dit « centré » s'il possède un axe de symétrie de révolution (ou **axe optique**). L'*axe optique* peut toujours être considéré comme *un rayon particulier qui n'est pas dévié* par le système centré. *Remarque* : toutes les longueurs étant algébriques en optique, on les compte positivement dans le sens de l'axe optique et négativement dans le sens contraire.

I.2 - Miroir plan

Le miroir plan est un système optique idéalisé, dont le modèle consiste à considérer que :

- sa surface est un dioptre parfaitement plan,
- la totalité des rayons lumineux sont réfléchis, aucun rayon n'est transmis.

Dans la plupart des cas, le miroir est constitué d'une surface métallique réfléchissante mais d'autres matériaux peuvent être utilisés. Un milieu transparent à surfaces planes utilisé dans les conditions de réflexion totale constitue aussi un bon exemple de miroir plan.

Les limitations du modèle sont évidentes :

- la réflectivité n'est jamais égale à 100 % (mais souvent supérieure à 90 %), et cette réflectivité dépend de la longueur d'onde de la lumière incidente,
- aucune surface matérielle n'est parfaitement plane : on peut caractériser la qualité de planéité du miroir en comparant la taille des défauts de planéité à la longueur d'onde de la lumière¹.

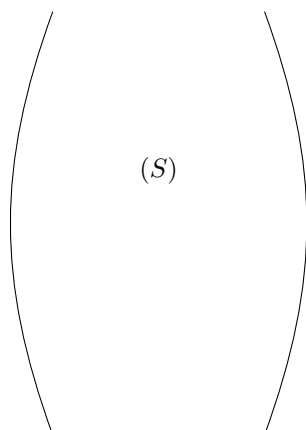
I.3 - Notion d'objet et d'image

Définition : Image d'un point

Soit une source *ponctuelle* de lumière placée en un point A et un système optique (S). Si tous les rayons issus de A passent, après avoir traversé le système (S), par *un point unique* A', alors on peut dire :

- que A' est l'image de A à travers (S),
- ou encore que A et A' sont **conjugués**,
- ou encore que le système (S) est **stigmatique** pour le couple de points A et A'.

1. Une surface à défauts « inférieurs à $\frac{\lambda}{2}$ » est considérée comme bas de gamme ; pour des défauts « inférieurs à $\frac{\lambda}{20}$ » la surface est jugée excellente.

Application : Relations de conjugaison**Relations de conjugaison :**

Pour le système (S), A est l'objet et A' est l'image de A à travers (S). Ceci est une convention qui tient compte du sens de propagation de la lumière. Grâce au principe de retour inverse de la lumière, on comprend rapidement que *si on inverse le sens de la lumière*, A' devient l'objet et A devient l'image de A' par (S). En revanche, en général, *pour un sens donné de la lumière, les notions d'objet et d'image ne peuvent pas être interverties*.

Propriété : Points à l'infini

Dans les cas particuliers où les rayons sont **parallèles** entre eux, on considère qu'ils sont concourants à l'infini. Le cas échéant, on aura donc des objets ou des images à l'infini.

I.4 - Caractère réel ou virtuel des points A et A' par rapport à un système

En optique, un point est l'intersection des rayons lumineux. Suivant la position du point par rapport au système optique (géométriquement et chronologiquement), le point peut être qualifié de réel ou de virtuel.

Image réelle : si, après être sortis de (S), les rayons issus de A sont convergents vers A' (dans le sens de propagation de la lumière), alors A' est une image réelle pour le système (S).

Image virtuelle : si, après être sortis de (S), les rayons issus de l'objet A sont divergents depuis A', alors A' est une image virtuelle pour le système (S).

Remarque : un observateur placé à la sortie du système n'est souvent sensible qu'à la *direction* de la lumière, et pourra « voir » les points réels ou virtuels, car il formera sur son capteur (rétine, écran, cellule photoélectrique) un nouveau point réel à l'aide de son propre dispositif optique (lentille, cristallin, etc.). Ainsi, l'œil et le cerveau ne distinguent pas un point virtuel d'un point réel et « voient » dans les deux cas un point situé à l'intersection des rayons.

Objet réel : un objet est dit réel pour le système (S), s'il est situé avant la face d'entrée de (S) (dans le sens incident de propagation de la lumière). Autrement dit, un objet réel est un point d'où partent un ensemble de rayons lumineux entrant dans le système optique.

Objet virtuel : un objet est dit virtuel pour le système (S) s'il est situé au delà de la face d'entrée de (S) (dans le sens incident de propagation de la lumière). Autrement dit, un objet virtuel est un point vers lequel convergent un ensemble de rayons lumineux entrant dans le système optique.

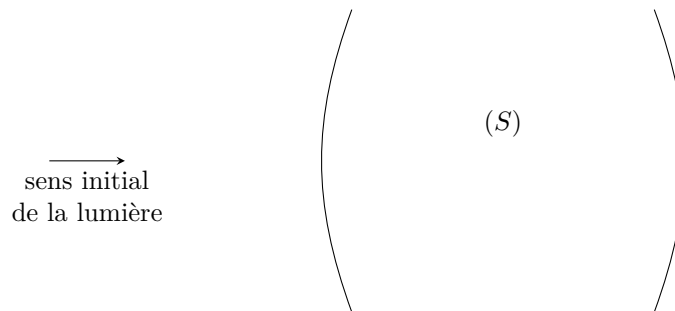
I.5 - Espaces objet et image pour un système optique (S)

On définit alors l'espace objet réel comme la région de l'espace qui rassemble les positions possibles pour un objet réel : on peut y placer effectivement un objet matériel pour qu'il envoie des rayons lumineux à travers le système optique. À l'opposé, on définit l'espace objet virtuel comme la région de l'espace qui rassemble les positions possibles pour un objet virtuel : aucun objet matériel ne peut y être placé pour envoyer directement des rayons vers le système mais un point situé dans le prolongement de rayons émergents semble être la source de ces rayons. Ainsi, un objet virtuel n'existe pas physiquement mais correspond à une construction géométrique permettant de décrire l'origine apparente des faisceaux lumineux.

On définira de façon similaire les espaces images réel et virtuels

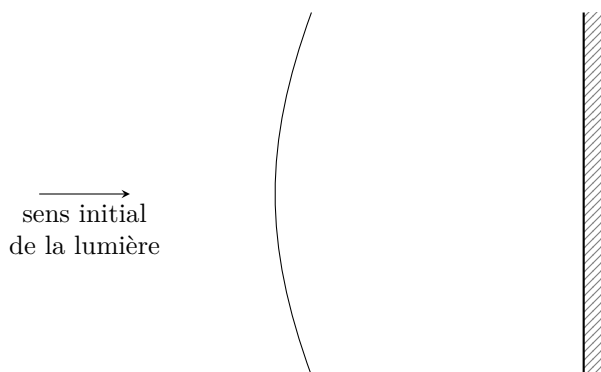
Application : Système dioptrique (transmission)

Système par exemple constitué par des associations de lentilles.



Application : Système catadioptrique (réflexion)

Système contenant par exemple des miroirs, ou des surfaces vitreuses (qui réfléchissent toujours un peu la lumière).



II - Stigmatisme et aplanétisme

II.1 - Stigmatisme rigoureux

Définition :

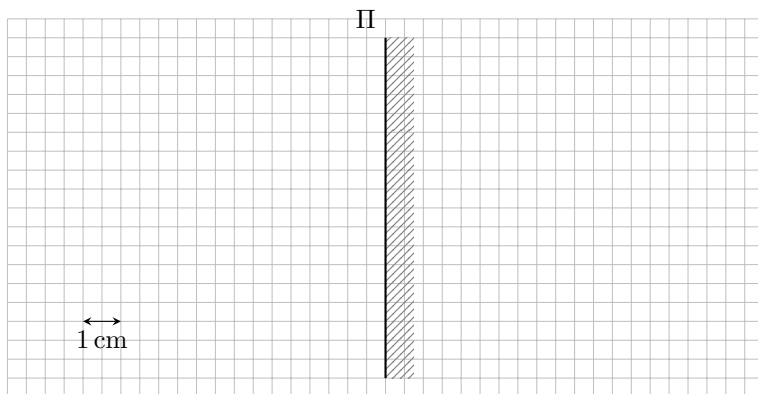
Un système optique (S) est rigoureusement stigmatique si **tout rayon** passant par le point objet A avant d'atteindre (S) passe, après avoir traversé (S), par le point image A'.

Remarque : les points A et A' peuvent être réels ou virtuels.

Conséquence : puisque dans un système rigoureusement stigmatique, à un point objet A, correspond un et un seul point image A', il existe entre les positions de A et de A' une relation unique appelée relation de conjugaison. On dit que les deux points sont conjugués par cette relation.

Exercice : Exemple de stigmatisme rigoureux : le miroir plan

A est un point objet réel situé à 3 cm à gauche d'un miroir plan. En utilisant les lois de Snell-Descartes construire l'image A' de l'objet A, vérifier que le système est stigmatique et donner la relation de conjugaison liant les positions de A et de A'. Préciser le caractère réel ou virtuel de l'image.



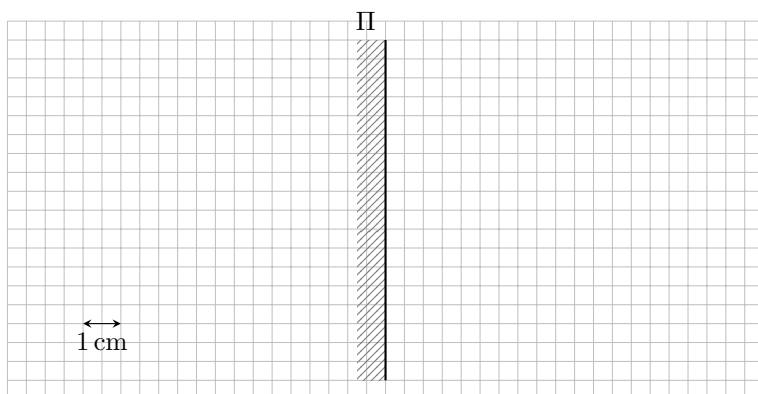
II.2 - Aplanétisme rigoureux

Définition :

Soit un système optique (S) stigmatique et possédant un axe de symétrie de révolution (Δ). Il y a aplanétisme rigoureux si pour tout objet $\mathbf{AB} \perp (\Delta)$, l'image de \mathbf{AB} à travers (S) est $\mathbf{A'B'} \perp (\Delta)$.

Exercice : Exemple d'aplanétisme rigoureux : le miroir plan

Construire l'image d'un objet virtuel \mathbf{AB} , perpendiculaire à l'axe optique, de hauteur 2 cm, et placé à 3 cm à droite d'un miroir plan. Préciser le caractère réel ou virtuel de l'image.



Loi : Miroir plan

Le seul système rigoureusement stigmatique et aplanétique pour tous les points est le miroir plan.

Il existe d'autres systèmes partiellement stigmatiques, c'est-à-dire stigmatiques seulement pour quelques points et éventuellement dans des conditions particulières (cf Annexes).

III - Approximation de Gauss des systèmes centrés

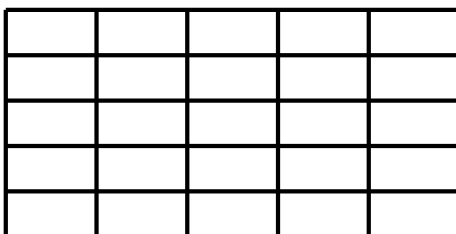
En dehors du miroir plan, d'autres systèmes optiques réalisent un stigmatisme rigoureux mais limités à quelques points particuliers². En conséquence, le stigmatisme rigoureux est une *exception*, et la quasi-totalité des systèmes optiques forment d'un point objet une image qui n'est pas ponctuelle, ce qui pose des questions quant à la possibilité de réaliser de « bonnes images » et quant aux critères et compromis à réaliser pour obtenir de telles images.

III.1 - Stigmatisme approché

Remarque préliminaire : tout récepteur de lumière (écran, œil, pellicule photo...) est formé de « grains » élémentaires accolés sur lesquels se forment les images (cellules de la rétine, grains d'une pellicule, pixels d'un photodétecteur...). La taille de ces grains élémentaires déterminent la *résolution* du détecteur : plus la taille est petite, plus le détecteur peut distinguer des rayons lumineux proches les uns des autres, et meilleure est la résolution.

Définition : Stigmatisme approché

Un système optique est dit approximativement stigmatique si l'image d'un point objet A est une tache de dimension inférieure à la résolution du détecteur de lumière utilisé.



Dans ces conditions, bien que l'image d'un point réalisée par le système optique ne soit pas ponctuelle, un seul grain du détecteur utilisé reçoit les rayons images. Pour l'utilisateur final, tout se passe comme si l'image était ponctuelle.

Pour améliorer le stigmatisme, il est toujours possible de limiter les systèmes optiques avec des diaphragmes permettant de limiter l'étendue de rayons incidents³.

III.2 - Aplanétisme approché

Les systèmes optiques classiques tels que les dioptrés, les lentilles, les miroirs sphériques, les lunettes astronomiques, les microscopes etc. peuvent être considérés comme approximativement aplanétiques pour des rayons *peu inclinés et peu éloignés de l'axe optique*.

2. Le foyer et un point à l'infini pour une parabole ou les foyers d'une ellipse, par exemples.

3. C'est notamment le réflexe qu'adoptent les myopes pour voir correctement sans leurs lunettes : ils plissent les yeux.

III.3 - Conditions de Gauss

On appelle « Conditions de Gauss » les conditions suivantes :

Définition : Conditions de Gauss

- Les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique,
- les rayons entrent dans le système optique en étant proches de l'axe optique.

Les rayons qui respectent les conditions de Gauss sont appelés **rayons paraxiaux**.

Les deux conditions ne sont pas identiques et sont à vérifier séparément. En effet un rayon peut être très incliné mais entrer dans le système en étant proche de l'axe et réciproquement un rayon peut avoir un angle d'incidence nul mais entrer dans le système en un point très éloigné de l'axe.

III.4 - Approximation de Gauss

Les conditions de Gauss conduisent notamment à considérer que les **angles des rayons sont petits**. Pour un angle α dont la **valeur sera exprimée en radians**, cela se traduit mathématiquement par les approximations suivantes :

Loi : Approximation de Gauss

Exercice : Approximation de Gauss

Calculer la tangente d'un angle de 0,100 rad, 0,200 rad, 0,300 rad, 0,400 rad puis 0,500 rad (soit environ $5,7^\circ$, $11,5^\circ$, $17,2^\circ$, $22,9^\circ$ et $28,6^\circ$).

III.5 - Conséquences de l'approximation de Gauss

Les conditions de Gauss permettent d'obtenir le stigmatisme approché **et** l'aplanétisme approché pour des systèmes centrés et garantissent donc la netteté des images obtenues. De plus, dans les conditions de Gauss, l'image d'un objet étant unique, une *relation de conjugaison* lie les positions de l'objet et de l'image. Il est alors toujours possible, connaissant le système et la position d'un des deux points de déterminer la position du deuxième point.

Tant que les conditions de Gauss sont respectées, les systèmes que nous étudierons seront considérés comme stigmatiques et aplanétiques de façon approchée.

Lorsque les conditions de Gauss ne sont plus respectées, il y a apparition d'aberrations géométriques.

III.6 - Difficultés et compromis

Les principales difficultés liées à l'approximation de Gauss sont dues à la restriction aux rayons paraxiaux qui nécessite une *ouverture* très faible des systèmes optiques. En effet, dès que l'étendue spatiale de la lumière est restreinte, les rayons lumineux sont diffractés, ce qui nuit au stigmatisme, et la luminosité diminue, ce qui nuit à la visibilité des images. Il faut donc adopter des compromis. Bien qu'on cherche à se limiter aux rayons paraxiaux, il faut :

- une ouverture suffisamment grande pour que la taille de la tache de diffraction soit inférieure à la résolution du détecteur ;
- une ouverture suffisamment grande pour obtenir une visibilité suffisante.

IV - Aberrations

On appelle *aberration* la dégradation de la qualité d'une image quand les conditions de stigmatisme et d'aplanétisme approchés ne sont plus réunies. On distingue deux types d'aberration :

- Les **aberrations chromatiques**. L'indice d'un matériau dépendant de la longueur d'onde (phénomène de *dispersion*), si la lumière utilisée est polychromatique, chaque longueur d'onde forme de l'objet sa propre image ; on observe alors dans l'image résultante des effets colorés. De telles aberrations peuvent être limitées en utilisant des lumières incidentes monochromatiques ou grâce à l'association de matériaux ayant des effets de dispersion opposés.
- Les **aberrations géométriques**. Lorsqu'on s'écarte des conditions de Gauss, et que les rayons ne sont plus paraxiaux, on observe dans l'image des défauts de stigmatisme et d'aplanétisme. Ces aberrations peuvent être corrigées pour utiliser les systèmes hors des conditions de Gauss (lentilles non-sphériques par exemple). Néanmoins, les systèmes deviennent vite complexes et surtout coûteux.

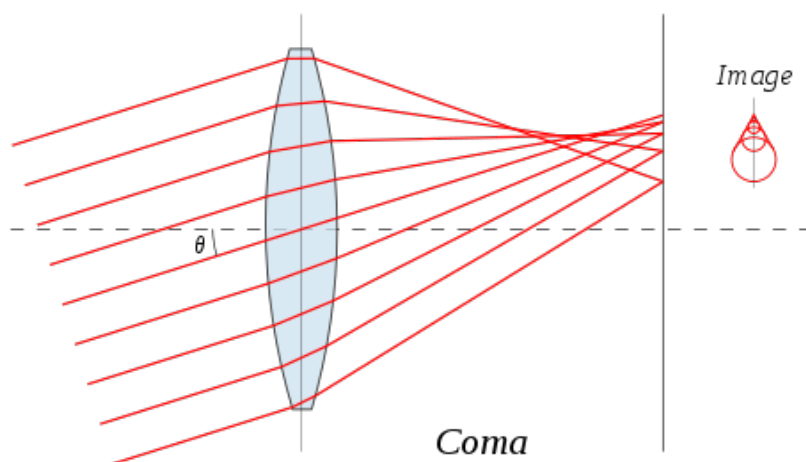


FIGURE 1.1 – Un exemple d'aberration géométrique pour un système dioptrique : l'aberration de coma. Si le système était parfaitement stigmatique, tous les rayons seraient concourants après le système. Comme le faisceau incident est très incliné, ils se croisent en fait après la lentille en différents points, formant une infinité d'images étalées dans l'espace. Si l'étalement de toutes ces images est plus large que la résolution du détecteur utilisé, l'image sera considérée floue.

Par Albedo ukr, Gixr, CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons

Annexes - quelques exemples de systèmes stigmatiques

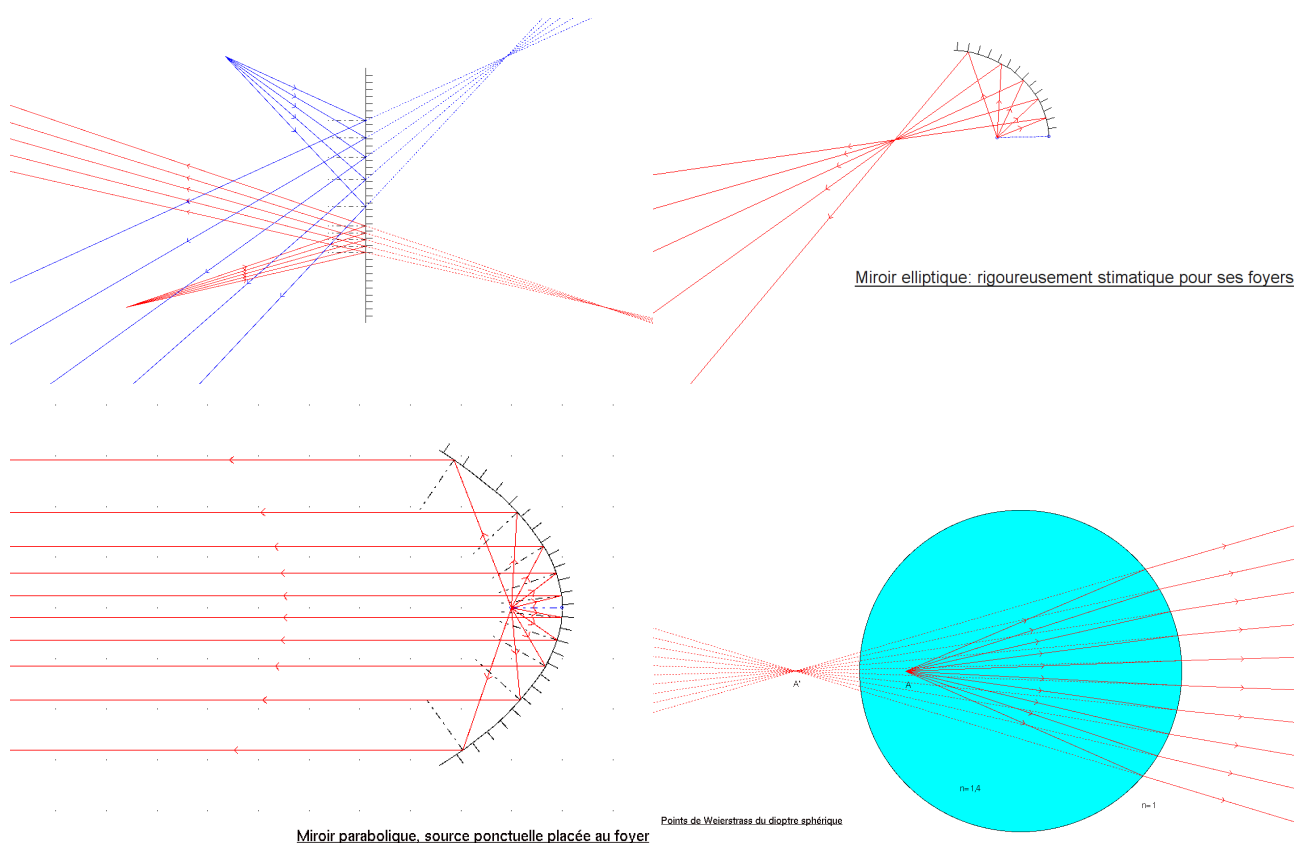


FIGURE 1.2 – En haut à gauche : miroir plan, stigmatique pour tous les points de l'espace. En haut à droite : miroir elliptique, stigmatique uniquement pour les foyers de l'ellipse (c'est-à-dire un seul couple de points). En bas à gauche : miroir parabolique, stigmatique pour un point à l'infini et le foyer de la parabole (c'est cette propriété qui est utilisée dans la réception de signaux satellitaires via une parabole). En bas à droite : boule sphérique, stigmatique pour un couple de points appelés points de Weierstrass.