OS – Chapitre D

Lentilles minces dans l'approximation de Gauss

I - Introduction

Définition : Lentille mince

Une lentille mince est un système optique centré constitué d'un milieu transparent homogène linéaire isotrope délimité par deux dioptres sphériques ou plans

Classification

On classe généralement les lentilles en fonction des types de dioptre qui la constitue et/ou de leur effet sur les rayons lumineux la traversant.

	Forme	Effet	Symbole
convexe			
concave			

Définition : Centre optique

Le centre optique d'une lentille, noté O est le point d'intersection entre la lentille et l'axe optique

Dans toute la suite du chapitre, on se placera dans les conditions de Gauss. Cela signifie que les rayons traversant une lentille font un angle très faible avec l'axe optique et passent proche du centre de la lentille. Lors de la réalisation de schémas, on utilisera généralement des échelles différentes sur les directions parallèle et perpendiculaire à l'axe optique de façon à augmenter « artificiellement » les angles et avoir des schémas lisibles. On retiendra cependant que toutes les propriétés et résultats donnés par la suite ne sont valables que tant que les conditions de Gauss sont respectées.

Une première propriété est qu'une lentille mince utilisée dans les conditions de Gauss est un système parfaitement stigmatique et aplanétique : tout objet ponctuel A définit une image parfaitement ponctuelle A', que les points A et A' soient réels ou virtuels. Pareillement, un objet AB perpendiculaire à l'axe optique formera une image $A'B'$ elle aussi perpendiculaire à l'axe optique.
Le centre optique O d'une lentille possède également une propiété importante :

Propriété : Centre optique

Tout rayon passant par le centre optique d'une lentille n'est pas dévié lors de sa traversée.

On rappelle que l'axe optique est orienté dans le sens de propagation initial de la lumière. Par conséquent, toutes les distances utilisées dans les calculs seront considérées comme des distances algébriques. Il sera également nécessaire d'indiquer explicitement sur les schémas le sens positif des distances afin d'éviter toute ambiguïté.

II - Éléments focaux des lentilles minces

II.1 - Foyers d'une lentille mince

On appelle éléments focaux l'ensemble des caractéristiques géométriques et numériques qui décrivent le comportement d'un système optique vis-à-vis des points (objet ou image) situés à l'infini.
Ces éléments regroupent :

- des points et plans particuliers (foyers et plans focaux),
- des paramètres caractéristiques (distance focale, vergence).

Définition : Foyer principal objet

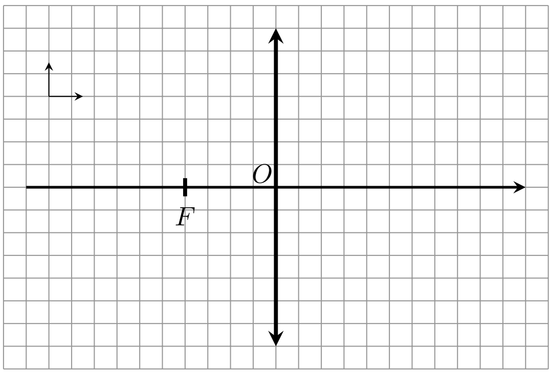
⊙ point situé sur l'axe optique dont l'image est à l'infini sur l'axe optique

- noté F

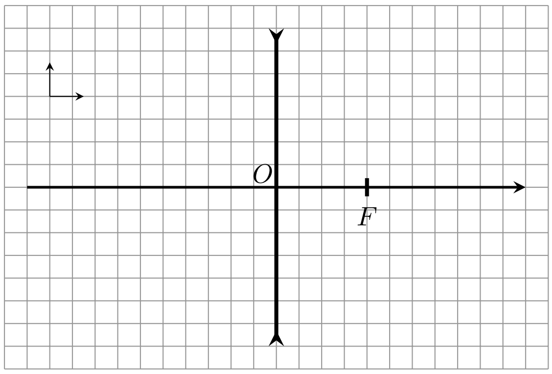
Propriété : Foyer principal objet

Tout rayon incident passant par F ressort parallèle à l'axe optique

Lentille convergente
F est situé avant la lentille



Lentille divergente
F est situé après la lentille



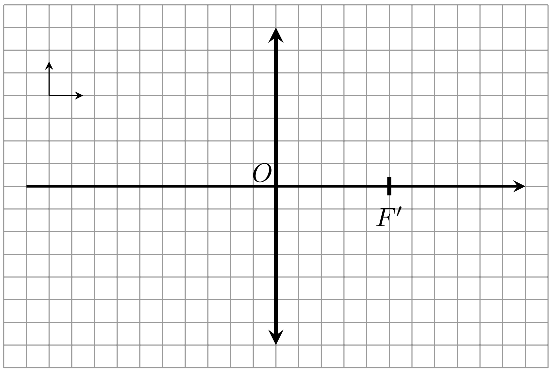
Définition : Foyer principal image

- ⊙ point situé sur l'axe optique dont l'antécédent est à l'infini sur l'axe optique
- noté F'

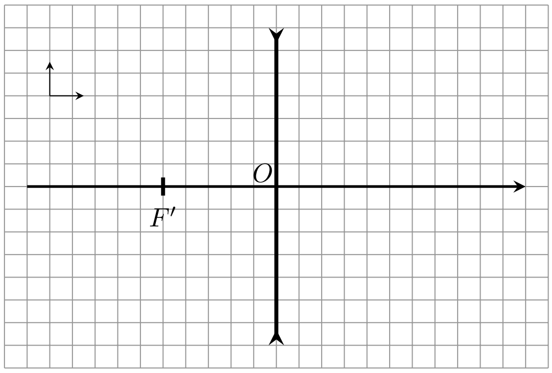
Propriété : Foyer principal image

Tout rayon incident parallèle à l'axe optique émerge en passant par F'

Lentille convergente
F' est situé <u>après</u> la lentille



Lentille divergente
F' est situé <u>avant</u> la lentille



Propriété : Relation entre foyers principaux objet et image

- F et F' sont symétriques par rapport à O
- F et F' ne sont pas conjugués

II.2 - Distance focale et vergence

Définition : Distance focale

Distance **algébrique** entre le centre optique O et le foyer principal image F', notée f'.

On définit également la distance algébrique f entre le centre O et le foyer principal objet F : $f = \overline{OF}$. La propriété de symétrie des foyers par rapport au centre implique directement $f = -f'$.

Définition : Vergence

Unité : dioptrie (δ). $1\,\delta = 1\,\mathrm{m}^{-1}$

La vergence mesure de la puissance optique de la lentille : plus V est grande (en valeur absolue), plus les foyers sont proches de la lentille et plus la lentille déviera la lumière.

- Pour une lentille convergente $f' > 0$ (donc $V > 0$ et $f < 0$).
- Pour une lentille divergente $f' < 0$ (donc $V < 0$ et $f > 0$).

II.3 - Plans focaux et foyers secondaires

Définition : Plans focaux

- **Plan focal objet** : plan perpendiculaire à l'axe optique passant par le foyer principal objet F
- **Plan focal image** : plan perpendiculaire à l'axe optique passant par le foyer principal image F'

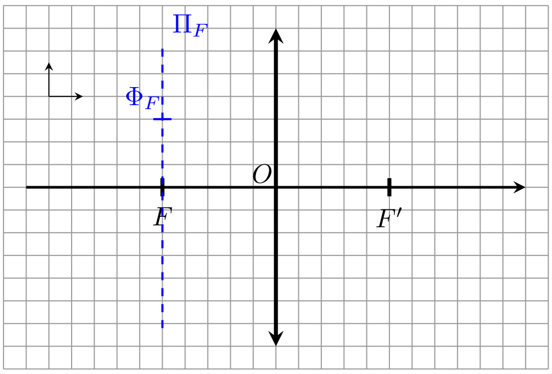
Un point situé sur une plan focal est alors un **foyer secondaire** : foyer secondaire objet Φ_F pour les points situés sur le plan focal objet Π_F et foyer secondaire image $\Phi_{F'}$ pour les points situés sur le plan focal image $\Pi_{F'}$.

Les propriétés d'aplanétisme des lentilles minces impliquent alors que l'image d'un foyer secondaire sera à la même distance que l'image de F, c'est-à-dire à l'infini. De même, l'antécédant d'un foyer secondaire est également situé à l'infini. On en déduit les propriétés suivantes :

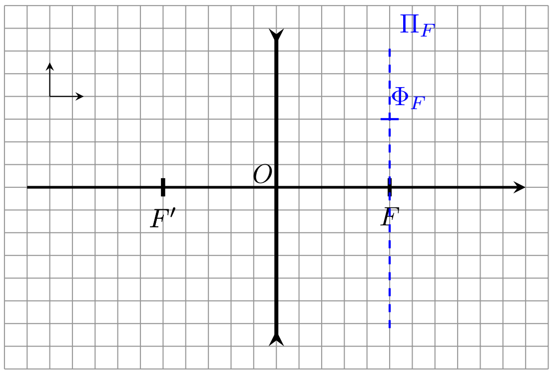
Propriété : Foyer secondaire objet

Tous les rayons issus d'un foyer secondaire objet ressortent parallèles entre eux

Lentille convergente



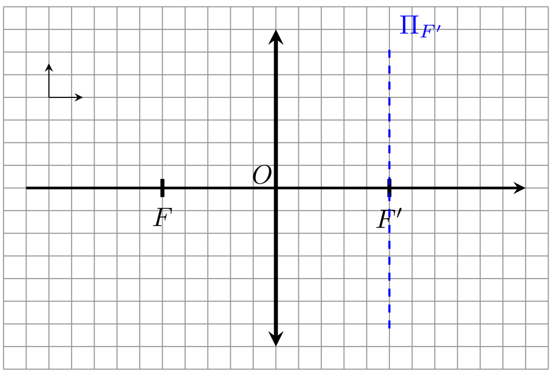
Lentille divergente



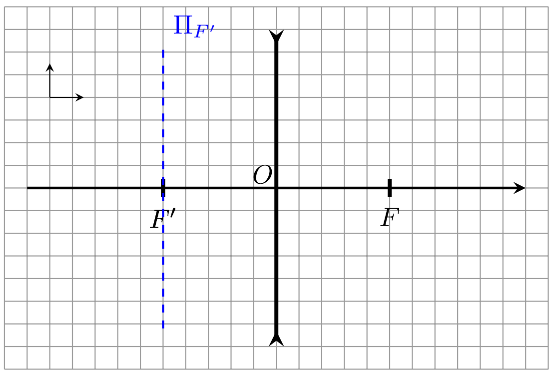
Propriété : Foyer secondaire image

Tous les rayons incidents parallèles entre eux ressortent en se croisant sur le plan focal image

Lentille convergente



Lentille divergente



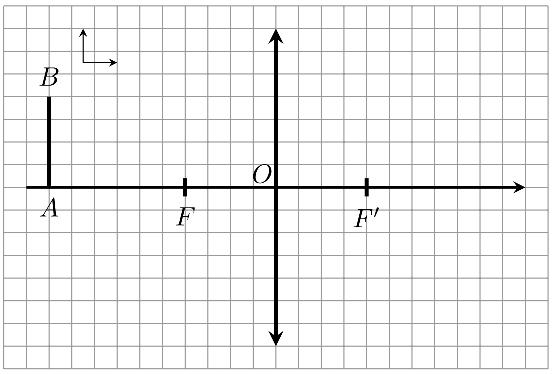
III - Constructions géométriques

III.1 - Image d'un objet par une lentille mince

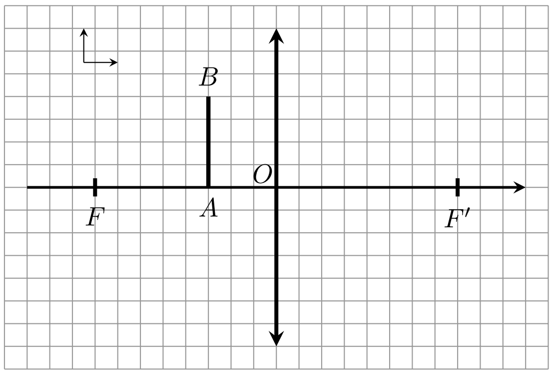
On souhaite ici construire l'image $A'B'$ d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique où le point A est sur celui-ci. La méthode est identique quelles que soient les natures de la lentille (convergente ou divergente) et de l'objet (réel ou virtuel) :

Méthode : Construction d'une image

1. On construit en premier B' image de B en utilisant 2 rayons parmi trois :
   - rayon passant par B et par O : il n'est pas dévié,
   - rayon parallèle à l'axe optique et passant par B : il ressort en passant par F',
   - rayon passant par B et F : il ressort parallèle à l'axe optique
2. on construit A' par aplanétisme ($A'B'$ est perpendiculaire à l'axe optique)



Image



Image

Une fois la construction réalisée, on peut regarder les propriétés de l'image :

- réelle ou virtuelle,
- directe ($A'B'$ dans le même sens que AB *ie* $\overline{AB} \cdot \overline{A'B'} > 0$) ou inversée ($A'B'$ dans le sens contraire à AB *ie* $\overline{AB} \cdot \overline{A'B'} < 0$),
- agrandie ($|\overline{A'B'}| > |\overline{AB}|$) ou réduite ($|\overline{A'B'}| < |\overline{AB}|$).

III.2 - Rayon émergent issu d'un rayon incident quelconque

Il s'agit de tracer le rayon sortant de la lentille pour n'importe quel rayon incident. On utilisera les propriétés des plans focaux et des foyers secondaires pour tracer UN rayon auxiliaire : tous les rayons incidents parallèles se croisent sur le plan focal image.
On souhaite ici construire l'image $A'B'$ d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique où le point A est sur celui-ci. La méthode est identique quelles que soient les natures de la lentille (convergente ou divergente) et de l'objet (réel ou virtuel) :

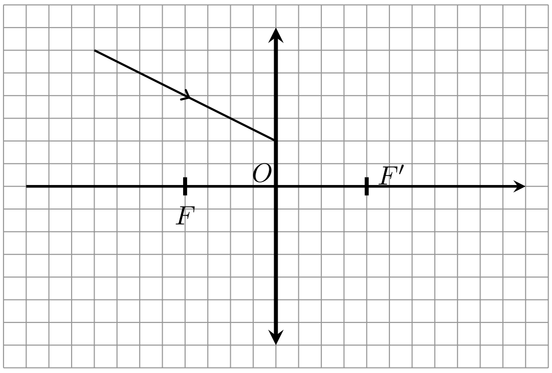
Méthode : des rayons auxiliaires

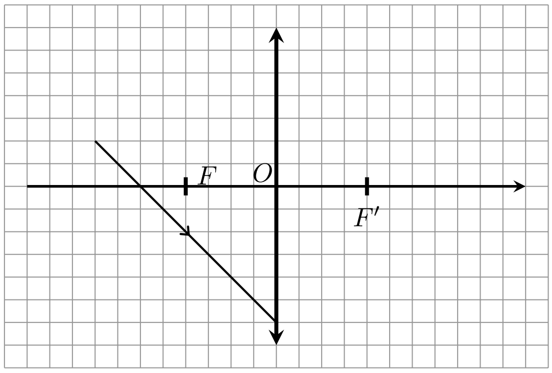
1. On construit un rayon parallèle au rayon incident parmi deux (rayon auxiliaire) :
   - rayon passant par O : il n'est pas dévié,
   - rayon parallèle passant par F : il ressort parallèle à l'axe optique
2. On trace le foyer secondaire image par lequel passe le rayon émergent correspondant au rayon auxiliaire.
3. Les deux rayons émergents correspondant au rayon incident initial et au rayon auxiliaire se croisent en ce point.

Remarques :

— les rayons auxiliaires ne correspondant a priori pas à un vrai parcours de la lumière sont toujours tracés en pointillés ;

— on peut également utiliser les propriétés du plan focal objet avec un rayon auxiliaire croisant le rayon incident au niveau du même foyer secondaire objet : les rayons emergents sont alors parallèles entre eux.





IV - Relations de conjugaison

Les positions des images et des objets conjugués peuvent donc s'obtenir par construction géométrique. Cependant, il existe également des relations de conjugaison reliant ces positions à la distance focale de la lentille considérée, et donnant également des informations sur la taille de l'image par rapport à celle de l'objet.

IV.1 - Grandissement et grossissement

On considère un objet étendu AB donc l'image à travers le système optique (S) est $A'B'$:

$$ABA \xrightarrow{(S)} A'B'$$

Définition : Grandissement

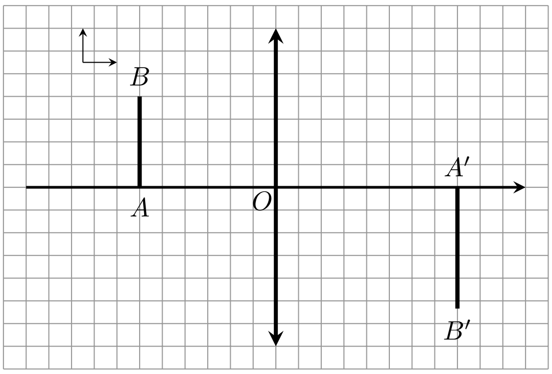
Le grandissement γ est défini par :

La valeur de γ donne alors des informations sur l'image :

— si $\gamma > 0$, l'image est droite et si $\gamma < 0$ l'image est inversée ;

— si $|\gamma| > 1$, l'image est agrandie et si $|\gamma| < 1$, l'image est réduite.

Application : Grandissement d'une lentille



Dans le cas d'objets et d'images à l'infini, les tailles ne sont plus définies par les longueurs algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ mais par les angles α et α'. On définit alors

Définition : Grossissement

On a les mêmes propriétés de l'image que pour le grandissement.

IV.2 - Relations de conjugaison

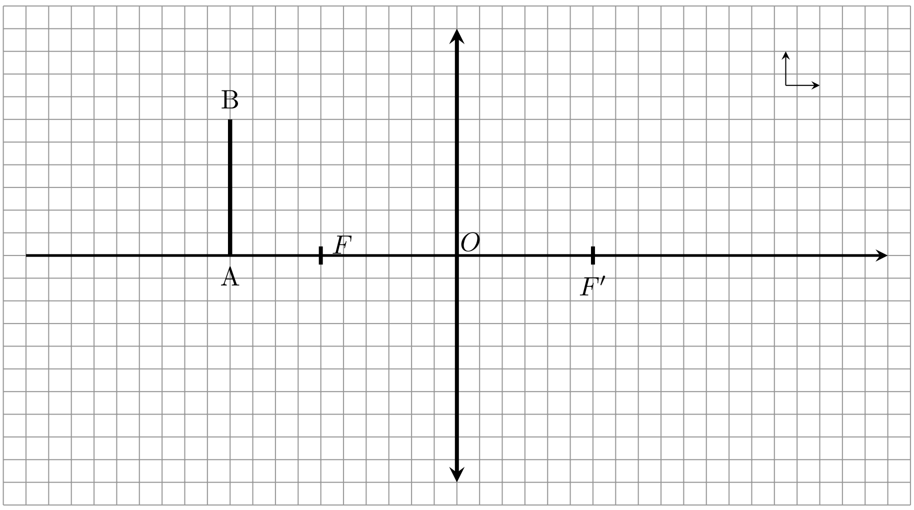
Il s'agit de relations **algébriques** qui permettent de déterminer la position et la taille de l'image $A'B'$ d'un objet AB à travers une lentille $\mathcal{L}$. Ces relations ne sont ni à connaître, ni à savoir démontrer, il faut en revanche être capable de les appliquer dans toutes les configurations.

Loi : Relations de conjugaison

Soit une lentille $\mathcal{L}$, de centre O, de foyer objet F, de foyer image F' et de distance focale image f'. Soit AB un objet, avec A situé sur l'axe optique et A'B' son image conjuguée par la lentille $\mathcal{L}$.

	Formules de Newton (origine au foyer)	**Formules de Descartes (origine au centre)**
Formule de position	$\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2$	$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V$
Formule de grandissement	$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{F'A'}}{-f'} = \frac{-f}{\overline{FA}}$	$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

Exercice : Démonstration des formules de Newton



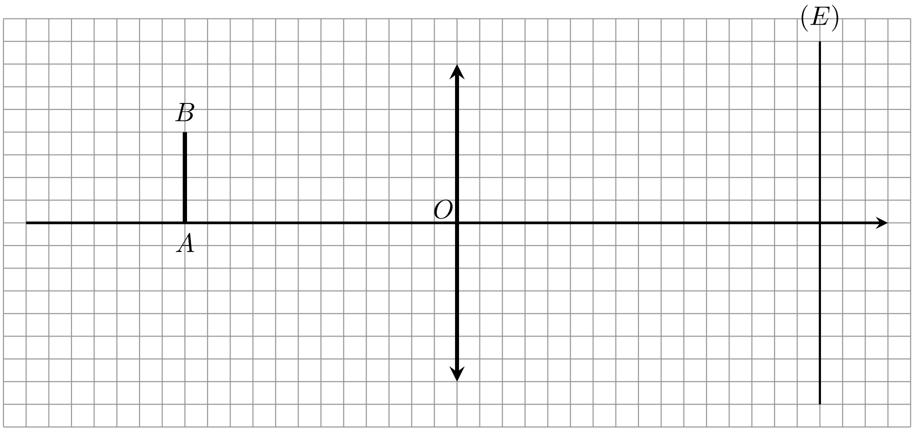
IV.3 - Condition de formation d'une image réelle par une lentille convergente

On considère ici un objet *réel* AB, une lentille *convergente* $\mathcal{L}$ de focale f' et un écran E placé à une distance D de l'objet.

Loi : Condition de formation de l'image de AB sur l'écran E

Pour pouvoir obtenir l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente, il faut

Démonstration

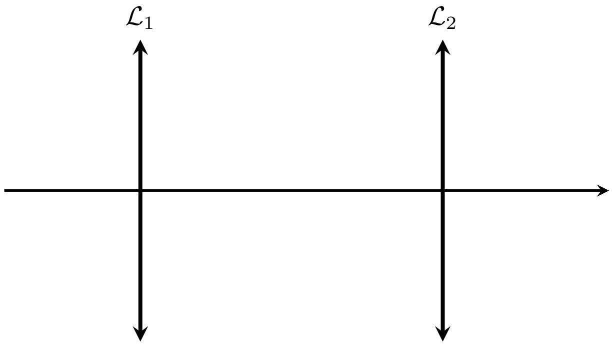


Question complémentaire : placer les foyers de la lentille sur la figure précédente

V - Doublets de lentilles

Définition : doublet de lentilles

Un doublet de lentille est constitué de deux lentilles partageant le même axe optique et plongées dans le même milieu (en général l'air).



L'image d'un point A à travers le système optique formé par les deux lentilles s'obtient en deux étapes successives :

— la lumière issue de A traverse d'abord la lentille $\mathcal{L}_1$, ce qui donne une première image A' ;

— puis cette image intermédiaire A' sert d'objet pour la lentille $\mathcal{L}_2$, qui forme l'image finale A''.

On peut représenter ce processus par les relations de conjugaison :

$$A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A''$$

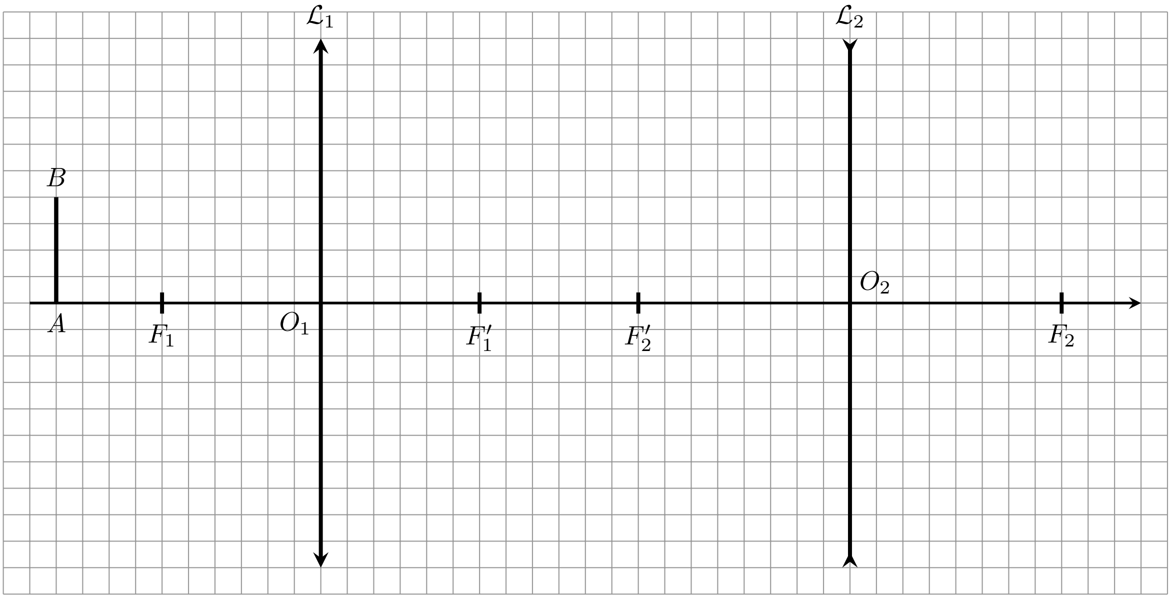
Ainsi, le point A' joue un double rôle : il est image par rapport à $\mathcal{L}_1$ et objet par rapport à $\mathcal{L}_2$.

Définition : Intervalle optique

On définit l'intervalle optique Δ du doublet par

$$\boxed{}$$

Application : construction de l'image d'un objet à travers un doublet de lentilles



Définition : Système afocal

Un système est dit **afocal** lorsque l'image d'un objet à l'infini se forme à l'infini.
Dans ce cas, on ne parle plus de *grandissement*, mais de *grossissement*.

Loi : Doublet afocal

Un doublet de lentilles est afocal si le foyer image de la première lentille est confondu avec le foyer objet de la seconde.

Démonstration

V.1 - Doublet accolé

Définition : doublet accolé

On appelle **doublet de lentilles accolées** un système optique constitué de deux lentilles minces, $\mathcal{L}_1$ de centre O_1 et $\mathcal{L}_2$ de centre O_2, placées en contact direct.
On peut alors écrire

Loi : Doublet accolé

Un doublet de lentilles accolées de focales respectives f'_1 et f'_2 est équivalent à une lentille unique de même centre et de focale f' avec

ou, en passant aux vergences V_1, V_2 et V :

Démonstration

Pour un objet AB quelconque, on a les relations de conjugaison suivante :

$$AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'B' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A''B''$$

. L'objectif est de montrer qu'il existe une relation de conjugaison directe entre AB et $A''B''$ identique à celle d'une lentille unique (Descartes ou Newton).