OS – Chapitre I

Circuits électriques linéaires du premier ordre

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les relations courant–tension des dipôles linéaires usuels. Deux d'entre eux, le condensateur et la bobine, relient la tension et le courant par une *dérivée temporelle* : dès que les grandeurs électriques varient, l'application des lois de Kirchhoff conduit donc à une équation différentielle. Nous nous limitons ici aux circuits ne comportant **qu'un seul** composant capable de stocker de l'énergie (un condensateur *ou* une bobine), associé à des résistors et à des sources. L'équation obtenue est alors une équation différentielle **linéaire du premier ordre à coefficients constants** : on parle de **circuit du premier ordre**. L'objectif du chapitre est double :

— mettre en place une **méthode systématique** d'étude d'un circuit du premier ordre, réutilisable telle quelle au second ordre et en mécanique ;

— distinguer le **régime transitoire**, pendant lequel les grandeurs évoluent à la suite d'une modification brusque du circuit (fermeture d'un interrupteur, échelon de tension), du **régime permanent**, atteint lorsque cette évolution est terminée. La durée du régime transitoire est caractérisée par une **constante de temps**. Les excitations étudiées étant continues, le régime permanent est ici textbfstationnaire : toutes les grandeurs y sont constantes, ce qui permet de le prévoir sans résoudre l'équation différentielle.

I - Régime transitoire, régime permanent

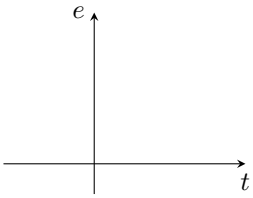
I.1 - Excitation en échelon

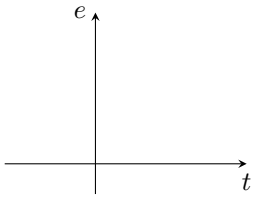
Pour étudier la réponse d'un circuit, le plus simple est de le soumettre à une excitation qui varie le plus brutalement possible : on passe instantanément d'une valeur à une autre.

Définition : Échelon

On appelle *échelon* (de tension ou de courant) une grandeur d'entrée subissant une variation brusque, c'est-à-dire une discontinuité, à un instant pris comme origine des temps [1]. On distingue l'échelon montant (à gauche) et l'échelon descendant (à droite) :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases} \qquad e(t) = \begin{cases} E & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$





La grandeur $e(t)$ est donc discontinue en $t = 0$: $e(t = 0)$ n'est pas défini et $e(0^+) \neq e(0^-)$.

Expérimentalement, un échelon est réalisé soit par la fermeture (ou le basculement) d'un **interrupteur** dans un circuit alimenté par une source continue, soit par un GBF délivrant un **signal carré** de basse fréquence : chaque front du signal carré est alors un échelon, et on observe la réponse du circuit entre deux fronts successifs.

1. On peut élargir cette définition à un instant $t_0 \neq 0$ quelconque, et à un passage d'une valeur constante quelconque E_1 à une autre valeur constante E_2, pas nécessairement nulle : $e(t) = E_1$ si $t < t_0$ et $e(t) = E_2$ si $t > t_0$.

Les deux situations physiques que nous allons rencontrer sont :

— la **charge** et la **décharge** d'un condensateur ;

— l'**établissement** et la **rupture** d'un courant dans une bobine.

I.2 - Les deux régimes de la réponse

Définition : Régime transitoire et régime permanent

— Le *régime transitoire* est l'intervalle de temps pendant lequel les grandeurs électriques évoluent, à la suite d'une modification de l'excitation ou du circuit.

— Le *régime permanent* (ou *régime établi*) est le régime atteint lorsque le régime transitoire est terminé : les grandeurs électriques ont alors la même forme temporelle que l'excitation. Si l'excitation est continue, le régime permanent est *continu* (*ie* toutes les grandeurs sont constantes).

Remarque : le régime permanent est atteint *asymptotiquement* : mathématiquement, il ne l'est jamais exactement. Nous verrons au paragraphe II.3 qu'il est en pratique atteint au bout de quelques constantes de temps.

I.3 - Rappels indispensables

L'étude d'un régime transitoire repose entièrement sur deux propriétés établies au chapitre précédent. La première concerne les conditions initiales :

Propriété : Continuité

L'énergie stockée dans un dipôle étant une fonction continue du temps :

— la **tension** u_C aux bornes d'un condensateur (et donc sa charge $q = Cu_C$) est une fonction **continue** du temps ;

— l'**intensité** i_L du courant traversant une bobine est une fonction **continue** du temps.

La seconde concerne l'état final :

Propriété : Comportement en régime continu

En régime continu établi, toutes les dérivées temporelles sont nulles, donc :

— un condensateur parfait est équivalent à un **interrupteur ouvert** ($i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$) ;

— une bobine parfaite est équivalente à un **fil** ($u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$).

Exercice : Quelles grandeurs peuvent être discontinues ?

Un interrupteur, fermé à $t = 0$, relie une source idéale de tension continue de fem E à un résistor R en série avec un condensateur C initialement déchargé.
Déterminer le courant dans le circuit et les tensions aux bornes des différents dipôles juste avant et juste après la fermeture de l'interrupteur.

juste avant : $t = 0^-$	grandeurs discontinues	juste après : $t = 0^+$

Conclusion : seules u_C et i_L sont continues *a priori* ; toutes les autres grandeurs doivent être obtenues par les lois de Kirchhoff.

II - Outil : résolution d'une équation différentielle du premier ordre

*Cette partie est un outil mathématique : elle sera utilisée dans **tout** le reste du chapitre, et bien au-delà.*

II.1 - Forme canonique

Toutes les équations que nous obtiendrons dans ce chapitre peuvent s'écrire, après division par le coefficient du terme dérivé, sous une forme unique dite forme canonique :

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t)$$

où $x(t)$ est la grandeur cherchée, $f(t)$ le *second membre* (imposé par l'excitation) et τ un paramètre positif caractéristique du circuit.

Définition : Constante de temps

Le paramètre τ, homogène à un temps, est appelé *constante de temps* du circuit. Il ne dépend que des caractéristiques du circuit, et pas de l'excitation.

Remarque : mettre une équation sous forme canonique n'est pas une coquetterie. C'est ce qui permet (i) d'identifier immédiatement τ, et donc la durée du régime transitoire, et (ii) de reconnaître qu'un circuit RC, un circuit RL en électricité, un amortissement fluide visqueux en mécanique ou un corps qui se refroidit en thermodynamique obéissent à la *même* équation.

II.2 - Résolution de l'équation canonique

L'équation est *linéaire* : l'inconnue x et ses dérivées n'y apparaissent qu'à la puissance un, sans produit entre elles ni fonction non linéaire de x, de sorte que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation sans second membre est encore solution. Il en résulte que sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.

Méthode : Résolution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre

1. **Solution homogène** x_h : solution générale de l'équation *sans* second membre.
2. **Solution particulière** x_p : une solution de l'équation complète, cherchée « de la même forme » que le second membre.
3. **Solution générale** : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, qui contient une constante d'intégration.
4. **Condition initiale** : on détermine la constante en écrivant $x(0^+) = x_0$ (problème de Cauchy).

Étape 1 : solution homogène

Résoudre $\dfrac{dx_h}{dt} + \dfrac{x_h}{\tau} = 0$ par séparation des variables.

La condition $\tau > 0$ est essentielle : elle assure que $x_h \to 0$, donc que le régime transitoire disparaît. Un $\tau < 0$ décrirait un système instable.

Étape 2 : solution particulière

On cherche x_p « de la même forme » que le second membre :

Second membre $f(t)$	**Forme cherchée pour** x_P
constant, $f(t) = f_0$	constante : $x_p = \text{cste}$
sinusoïdal, $f(t) = F\cos(\omega t)$	$x_p = A\cos(\omega t + \varphi)$ (*cf.* chapitre sur le RSF)
quelconque	méthode de la variation de la constante (*cf.* cours de maths)

Dans ce chapitre, le second membre sera toujours **constant** après l'échelon.

Second membre constant : déterminer x_p tel que $\dfrac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t} + \dfrac{x_p}{\tau} = f_0$.

Cette solution particulière constante n'est autre que la valeur de x en régime permanent, que l'on notera désormais x_∞ ou x_{rp}.

Étapes 3 et 4 : solution générale et condition initiale

La solution générale s'écrit donc

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + x_\infty.$$

Elle dépend d'une constante λ : il existe donc une infinité de solutions, une pour chaque valeur de λ. Parmi toutes ces solutions possibles, on cherche celle qui passe par la *condition initiale* $x(0^+) = x_0$, ce qui fixe la valeur de λ.[2] La recherche de la solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale donnée s'appelle un problème de Cauchy ; pour une équation linéaire du premier ordre, il admet une solution unique.

Déterminer λ, puis écrire $x(t)$.

Autrement dit : valeur finale + écart initial à la valeur finale qui s'amortit exponentiellement.

Propriété : Cas particuliers utiles

- si $x_0 = 0$: $x(t) = x_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ (croissance, « charge »)
- si $x_\infty = 0$: $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ (décroissance, « décharge »)

II.3 - Exploitation du résultat

Traçons l'allure de $x(t)$ dans le cas d'une croissance de x_0 vers x_∞.

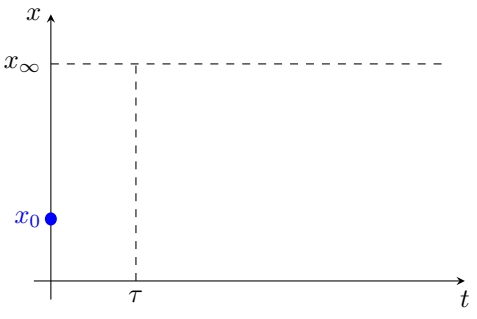
On notera que la courbe ne présente ni oscillation ni dépassement : la réponse est apériodique.
Deux lectures graphiques sont à connaître :

☐ la **tangente à l'origine** a pour pente

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{0+} = \frac{x_\infty - x_0}{\tau},$$

elle coupe l'asymptote $x = x_\infty$ à l'instant $t = \tau$;

☐ à $t = \tau$, l'écart initial a été réduit de $1 - e^{-1} = 63\,\%$;



2. On peut généraliser : la condition initiale peut porter sur la valeur de x à un instant t_0 quelconque, $x(t_0) = x_0$ (pas nécessairement $t_0 = 0$), voire sur la valeur de la dérivée $\dot{x}(t_0)$. Pour une équation du premier ordre, ces deux types de condition sont équivalents, puisque l'équation relie $\dot{x}(t_0)$ à $x(t_0)$: $\dot{x}(t_0) = f(t_0) - x(t_0)/\tau$.

L'écart relatif restant à l'instant t vaut $\mathrm{e}^{-t/\tau}$:

t	0	τ	2τ	$\mathbf{3\tau}$	4τ	$\mathbf{5\tau}$
écart restant $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ 100 %		37 %	14 %	**5 %**	2 %	**0,7 %**
évolution effectuée 0 %		63 %	86 %	**95 %**	98 %	**99 %**

Loi : Durée du régime transitoire

La durée du régime transitoire est de l'ordre de quelques constantes de temps τ. Par convention, on considère que le régime permanent est atteint lorsque x a effectué 99 % de son évolution totale (de x_0 vers x_∞), ce qui correspond à une durée $t \simeq 5\tau$.[3]

Méthode : Mesure expérimentale de τ

Trois méthodes permettent de déterminer τ à partir de l'enregistrement de $x(t)$, l'origine des temps étant prise à l'instant de l'échelon :

- ☐ **Tangente à l'origine** : on trace la tangente à la courbe en $t = 0$ et on lit l'abscisse de son intersection avec l'asymptote horizontale $x = x_\infty$.
- ☐ **Évolution de 63 %** : on repère l'instant où la grandeur a effectué 63 % de son évolution totale, soit $x = x_0 + 0{,}63\,(x_\infty - x_0)$. Cet instant vaut τ.
- ☐ **Linéarisation** : on trace $\ln|x(t) - x_\infty|$ en fonction de t. On obtient une droite de pente $-1/\tau$. C'est la méthode la plus précise, car elle exploite *tous* les points et permet une régression linéaire rigoureuse, mais elle exige de bien connaître x_∞.

III - Charge d'un condensateur : circuit RC

III.1 - Montage et mise en équation

Un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C, initialement déchargé ($q(t \leq 0) = 0$, donc $u_C(t \leq 0) = 0$), sont placés en série aux bornes d'une source idéale de tension délivrant l'échelon

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C pour $t > 0$, puis la mettre sous forme canonique.

3. On parle aussi de *temps de réponse à 5 %* : c'est la durée au bout de laquelle x a effectué 95 % de son évolution, soit $t \simeq 3\tau$.

Exercice : Homogénéité et ordre de grandeur

Vérifier par analyse dimensionnelle que RC est bien un temps. Calculer τ pour $R = 1{,}0\,\text{k}\Omega$ et $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$.

Le régime transitoire dure donc quelques millisecondes : pour l'observer au GBF, il faudra un signal carré de période grande devant 1 ms, soit une fréquence de l'ordre de quelques dizaines de hertz.

III.2 - Conditions initiales et état final

D'après la partie II, la solution est entièrement déterminée par trois nombres : $u_C(0^+)$, $u_{C\infty}$ et τ. La constante de temps découle de la mise en équation ; les deux autres s'obtiennent sans résoudre l'équation, en étudiant deux circuits équivalents particuliers : le circuit juste après la commutation, et le circuit en régime permanent final.

Conditions initiales

Méthode : Détermination des conditions initiales

1. **Circuit en $t = 0^-$** : on se place dans l'état antérieur à la commutation, avec les sources et les interrupteurs dans leur position *avant* la commutation. Si un régime permanent était établi, on remplace chaque condensateur par un interrupteur ouvert et chaque bobine par un fil. Par application des lois de Kirchhoff, on en déduit les grandeurs continues : $u_C(0^-)$ et $i_L(0^-)$ (ou on les lit dans l'énoncé).
2. **Continuité** : $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ et $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
3. **Circuit en $t = 0^+$** : on redessine le circuit *après* la commutation, avec les sources à leur nouvelle valeur et les interrputeurs dans leur nouvelle position. Les lois de Kirchhoff donnent alors *toutes* les autres grandeurs initiales.

Attention : ne jamais écrire la continuité d'une grandeur autre que u_C et i_L.

Application : Circuit RC – détermination de $u_C(0^+)$ et $i(0^+)$.

circuit en $t = 0^+$

Régime permanent

Méthode : Détermination de l'état final

On suppose l'excitation continue et le régime permanent atteint : toutes les grandeurs sont alors constantes, et leurs dérivées nulles.

1. **Circuit en régime permanent** ($t \to +\infty$ ou $t \gg \tau$) : on dessine le circuit avec la source à sa valeur finale, en remplaçant chaque condensateur par un interrupteur ouvert ($i_C = 0$) et chaque bobine par un fil ($u_L = 0$).
2. **Lois de Kirchhoff** : on en déduit les grandeurs finales ($u_{C\infty}$, $i_{L\infty}$, et toutes les autres).
3. **Vérification** : on peut retrouver x_∞ en annulant la dérivée dans l'équation différentielle, ce qui donne $x_\infty/\tau = f_0$, soit $x_\infty = \tau f_0$.

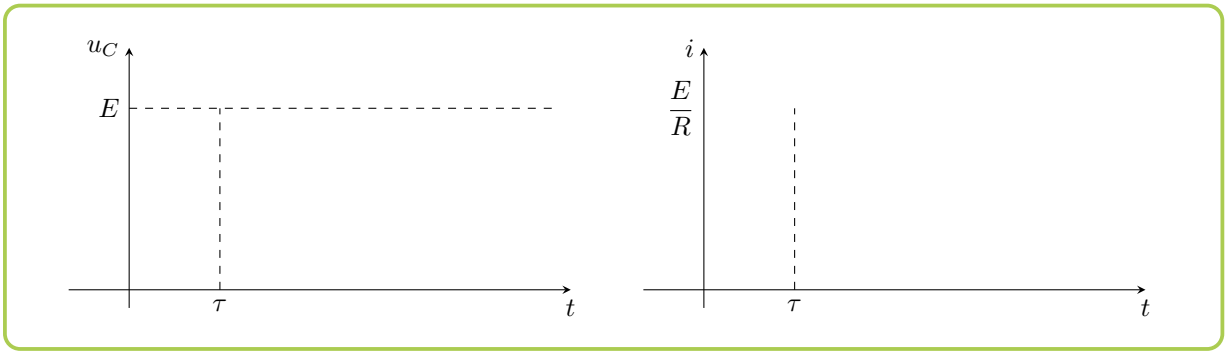
Application : Circuit RC – détermination de $u_{C\infty}$ et i_∞.

circuit en régime permanent

III.3 - Réponse du circuit

Résoudre l'équation différentielle, puis en déduire $i(t)$ et $u_R(t)$.

Vérifications systématiques : les valeurs en 0^+ et en $+\infty$ sont bien celles prévues, et la loi des mailles $u_R + u_C = E$ est vérifiée à tout instant.



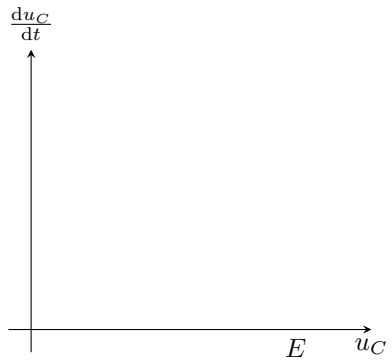
III.4 - Portrait de phase

Définition : Portrait de phase

Soit $x(t)$ l'une des grandeurs solutions de l'équation différentielle. On appelle *portrait de phase* la courbe paramétrée par le temps décrite par le point de coordonnées $\left(x(t),\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ dans le *plan de phase*.

L'intérêt du portrait de phase est de s'affranchir du temps : il décrit la *dynamique* du système, indépendamment de l'instant initial choisi.

Application : Circuit RC – portrait de phase de u_C en charge.



Remarques :

- L'allure rectiligne est caractéristique d'un système linéaire du premier ordre.
- Le point $(E,\ 0)$, où la dérivée s'annule, correspond au régime permanent : il est parcouru asymptotiquement et jamais atteint. On l'appelle **point attracteur** du système.
- Comme $i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, la grandeur $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ est égale à i à un facteur $\frac{1}{C}$ près : on peut donc l'obtenir directement, sans dériver le signal, en mesurant i (ou $u_R = R\,i$, ce qui donne $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{u_R}{\tau}$).

III.5 - Bilan énergétique

Un circuit n'est pas seulement un système de tensions et de courants : c'est aussi un système qui échange de l'énergie. Le *bilan énergétique* permet de savoir où va l'énergie fournie par la source, c'est-à-dire quelle part est stockée dans le condensateur et quelle part est dissipée par effet Joule dans le résistor, et d'en déduire le rendement de l'opération.

Un bilan de puissance s'obtient toujours de la même façon :

Méthode : Bilan énergétique dans un circuit

1. écrire l'équation du circuit (loi des mailles) ;
2. multiplier cette équation par l'intensité i : chaque terme devient une puissance ;
3. identifier physiquement chaque terme (puissance fournie, dissipée, dérivée d'une énergie stockée) ;
4. intégrer entre deux instants pour passer aux énergies.

Établir le bilan de puissance du circuit RC en charge.

Interprétation : la puissance $\mathcal{P}_g$ fournie par la source se répartit à chaque instant entre la puissance $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule dans le résistor et la puissance stockée sous forme d'énergie électrique dans le condensateur.

Application : Rendement de la charge

En utilisant les expressions de $u_C(t)$ et $i(t)$, calculer les énergies $\mathcal{E}_g$, $\mathcal{E}_J$ et $\mathcal{E}_C$ échangées entre les instants 0 et t_0. Vérifier le bilan, puis conclure sur le rendement de l'opération de charge lorsque $t_0 \to +\infty$.

Avec $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$, $i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et $\tau = RC$:

✔

La moitié de l'énergie fournie est inévitablement dissipée par effet Joule, et ce quelle que soit la valeur de R : diminuer R accélère la charge mais augmente le courant, sans rien changer au rendement. C'est une limitation fondamentale de la charge d'un condensateur à tension constante.

IV - Établissement d'un courant : circuit RL

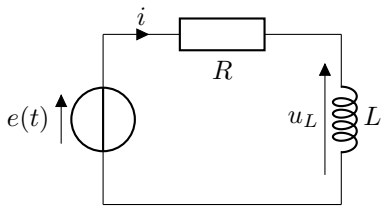
L'étude de la réponse d'un circuit RL à un échelon reprend, point par point, celle du circuit RC : physiquement et mathématiquement, les problèmes à résoudre sont les mêmes. C'est la **méthode générale** qu'il faut avoir comprise.
Seuls changent le vocabulaire et la grandeur étudiée : pour le circuit RC, on suit la charge du condensateur (ou sa tension), alors que pour le circuit RL on étudie l'*établissement du courant*.

IV.1 - Position du problème

Une bobine parfaite d'inductance L est mise en série avec un résistor R et soumise à l'échelon de tension

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Le circuit étant au repos depuis longtemps avant l'échelon, aucun courant ne circule : $i(0^-) = 0$.



IV.2 - Mise en équation

Application : Mise en équation du circuit RL.

1. Déterminer, de i et u_L, laquelle est continue en $t = 0$.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par cette grandeur pour $t > 0$ de deux façons : par la loi des mailles, puis par une étude énergétique.
3. En déduire la constante de temps τ et la forme canonique de l'équation.

IV.3 - Régime permanent et valeurs finales

Application : Circuit RL – détermination de i_∞ et $u_{L\infty}$.

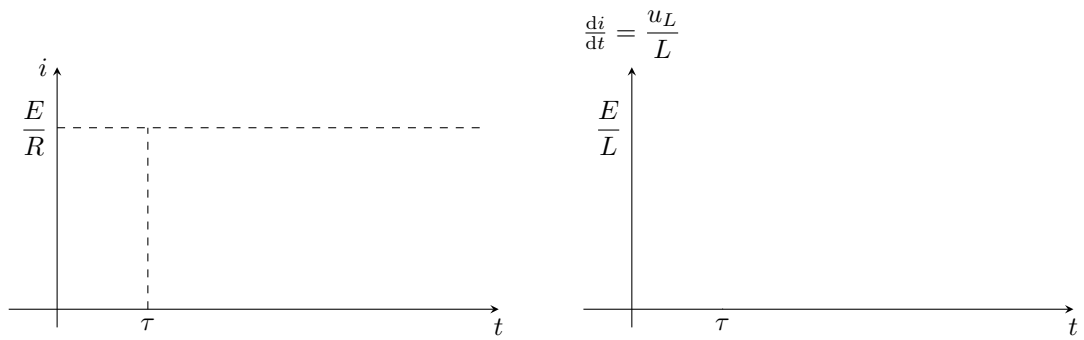
circuit en régime permanent

IV.4 - Résolution analytique

Déterminer $i(0^+)$, résoudre l'équation, puis en déduire $u_L(t)$.

IV.5 - Chronogrammes

On trace la grandeur étudiée $i(t)$ et sa dérivée temporelle $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_L/L$, qui est proportionnelle à u_L.

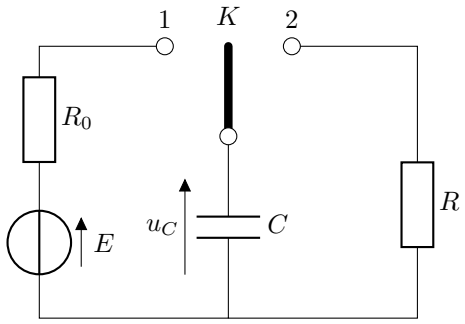


4. On vérifiera la cohérence de cette équation avec l'orientation des dipôles : la source de tension, qui *fournit* la puissance électrique, est en convention *générateur* tandis que la résistance et la bobine, qui *consomment* la puissance électrique, sont en convention *récepteur*.

V - Décharge d'un condensateur

V.1 - Position du problème

Le condensateur, préalablement chargé à travers R_0 sous la tension E (position **1** de l'interrupteur), est déconnecté de la source à $t = 0$ (position **2** de l'interrupteur) et refermé sur un résistor R'. On admet que, en $t = 0$, l'interrupteur est en position **1**) depuis très longtemps (un régime permanent a donc été atteint et on a $u_c(t = 0^-) = E$). Cette situation correspond au second front du signal carré délivré par un GBF. Plus aucune source n'alimente le circuit : il n'y a plus de second membre dans l'équation et le circuit évolue librement. On parle de **régime libre**.



V.2 - Mise en équation et résolution

La démarche est exactement celle de la charge : grandeur continue, équation différentielle, état final, résolution, tracé des chronogrammes.

Application : Décharge du condensateur dans le résistor R.

1. Déterminer la grandeur continue en $t = 0$ et en déduire la condition initiale, puis la valeur finale $u_{C\infty}$ par le circuit équivalent en régime permanent.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par cette grandeur pour $t > 0$, la mettre sous forme canonique et identifier la constante de temps τ.
   Il faut être particulièrement attentif à l'**orientation des dipôles** : quel que soit le choix d'orientation fait pour le courant i, l'un des deux dipôles, entre la résistance et le condensateur, est nécessairement en convention *générateur* !
3. Résoudre l'équation, puis en déduire $u_C(t)$ puis $i(t)$.

