OS – Chapitre J

Oscillateur harmonique

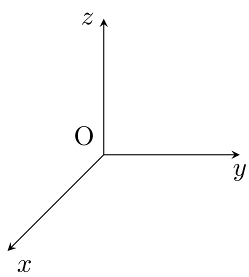
I - Oscillateur harmonique en mécanique : système masse–ressort

I.1 - Rappels de mécanique du point

a - Cinématique

On se place dans un référentiel $(\mathcal{R})$ dans lequel on définit un repère $(Oxyz)$ orthonormé direct. On utilise les

Coordonnées cartésiennes



Pour un objet mobile situé au point $M(t)$ de coordonnées $\{x(t),\, y(t),\, z(t)\}$, on définit :

Définition : Vecteur Position

Définition : Vecteur vitesse

En coordonnées cartésiennes :

Définition : Vecteur accélération

En coordonnées cartésiennes :

Remarques :

— La **valeur** de la vitesse (respectivement de l'accélération) est la **norme** du vecteur vitesse (respectivement accélération) :

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{et} \quad a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

— $\dim(v) = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$, v (ainsi que toutes ses composantes) s'exprime en $\mathrm{m\,s^{-1}}$;

— $\dim(a) = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$, a (ainsi que toutes ses composantes) s'exprime en $\mathrm{m\,s^{-2}}$.

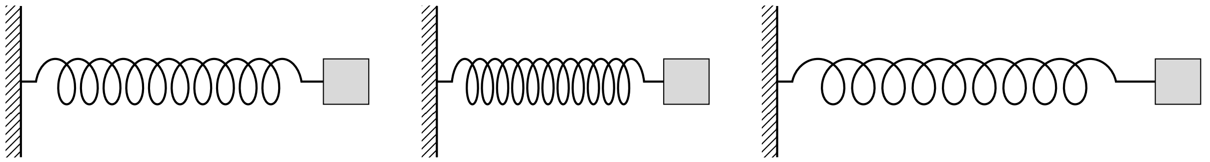
b - Dynamique

Le mouvement d'un objet peut être modifié par une action *extérieure*, celle-ci est caractérisée par son intensité, sa direction et son sens. Pour la représenter, on définit donc un **vecteur force** $\vec{F}$.
Parmi les forces classiques, on a

— Poids $\boxed{\vec{P} = m\,\vec{g}}$ où m est la masse de l'objet et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur : vecteur vertical, orienté vers le bas, de norme $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$;

— Force de rappel élastique $\vec{F_R}$: force exercée par un ressort de longueur actuelle ℓ, caractérisé par sa *longueur à vide* ℓ_0 et sa *raideur* k. Cette force a tendance à ramener le ressort à sa longueur à vide, et est proportionnelle à l'*élongation*, c'est-à-dire la différence entre la longueur à vide et la longueur actuelle :

Ressort au repos ($\ell = \ell_0$) Ressort comprimé ($\ell < \ell_0$) Ressort étiré ($\ell > \ell_0$)



L'expression de la force de rappel est $\boxed{\vec{F_R} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_R}$ où $\vec{u}_R$ est le vecteur unitaire colinéaire au ressort orienté vers le point qui subit la force.

Le lien entre cinématique et dynamique est fait grâce à la

Loi : 2e loi de Newton (ou Relation Fondamentale de la Dynamique – RFD)

Soit un point matériel M de masse m soumis à un ensemble de forces extérieures de résultante $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$.
Dans un référentiel galiléen :

c - Énergie

Les grandeurs énergétiques utiles en mécanique sont :

Définition : Énergie cinétique

Pour un point matériel de masse m, animé d'une vitesse v

Définition : Énergie potentielle

Grandeur associée à *certaines* forces (dites conservatives). Parmi celles-ci

— **énergie potentielle de pesanteur** (associée au poids $\overrightarrow{P}$) :

où (Oz) est l'axe vertical, orienté vers le haut.

— **énergie potentielle élastique** (associée à la force de rappel d'un ressort $\overrightarrow{F_R}$) :

Définition : Énergie mécanique

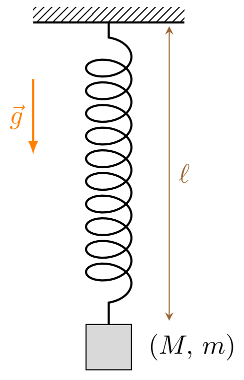
Pour un point matériel, somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles de toutes les forces conservatives qui s'exercent dessus :

I.2 - Étude du système masse–ressort

a - Position du problème (ressort vertical)

On considère un point matériel M, de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort vertical, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. On se place dans le référentiel terrestre, que l'on supposera galiléen et on néglige les frottements.

Les forces qui s'exercent sur le point M sont son poids $\overrightarrow{P}$ et le rappel du ressort $\overrightarrow{F_R}$.



b - Mise en équation

On choisit le repère $(Oxyz)$ tel que

La RFD donne

On projète sur l'axe (Ox) (*ie* on multiplie scalairement l'équation par $\vec{u}_x$), soit

Remarque

Si on note $X = x - x_{\text{eq}}$

c - Aspect énergétique

Énergie cinétique

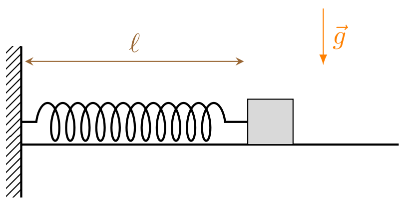
Énergie potentielle

Énergie mécanique

On s'intéresse aux variations de l'énergie dans le temps, on exprime donc

d - Configuration alternative (ressort horizontal)

On considère un point matériel M, de masse m, accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Le point M peut se déplacer *sans frottement* le long d'une surface horizontale. On se place dans le référentiel terrestre, que l'on supposera galiléen.



Analyse et mise en équation

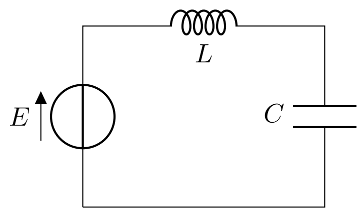
On choisit le repère $(Oxyz)$ avec O extrémité fixe du ressort, (Ox) horizontal, colinéaire et de même sens que le ressort et (Oz) vertical vers le haut.

Les forces sont alors :

II - Oscillateur harmonique en électricité : circuit LC

a - Positionnement du problème

On considère un circuit constitué d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C en série, alimentés par une source de tension idéale de fem E.



b - Mise en équation

On complète le schéma du circuit en indiquant les grandeurs utiles.

On applique la loi des mailles

Mise sous forme canonique

c - Aspect énergétique

Puissance et énergie des dipôles

Bilan énergétique du circuit

On s'intéresse à la variation de l'énergie stockée dans le circuit

On vérifie bien que l'énergie fournie par le générateur se retrouve stockée dans la bobine et le condensateur.

III - Comportement temporel de l'oscillateur harmonique

III.1 - Résolution de l'équation canonique

La méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre est strictement similaire à celle utilisée pour les équations du premier ordre : On retrouve les mêmes différentes étapes que celles vues au chapitre précédent.

Méthode : Résolution de l'équation canonique d'un oscillateur harmonique

Soit une équation d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = f(t) = \omega_0^2 y_0(t)$$

La solution de cette équation est obtenue en appliquant les étapes successives suivantes :

1. On cherche $y_h(t)$ la solution générale de l'équation homogène (ou sans second membre) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_h}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y_h = 0$$

2. On cherche <u>une</u> solution particulière $y_p(t)$ de l'équation avec second membre.
3. La solution générale de l'équation avec second membre est alors

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

4. On résout le problème de Cauchy : on cherche <u>la</u> solution qui passe par les conditions initiales.

L'étape 2 (solution particulière y_p) est strictement identique à ce qui a été vu pour les équations d'ordre 1, les techniques mises en œuvre sont les mêmes : soit une solution similaire au second membre $f(t)$ ou $y_0(t)$, soit la méthode de variation de la constante. Dans le cadre de ce chapitre, le second membre sera toujours constant ; on pourra se contenter de chercher y_p sous la forme d'une constante (on aura alors $y_p = y_0$).

L'étape 4 nécessite de connaitre 2 conditions initiales. Nous verrons en effet que, lors de la résolution de l'équation homogène, deux constantes d'intégration vont apparaitre au lieu d'une seule. Cela reviendra la plupart du temps à connaitre les valeurs initiales de y ($y(t=0) = y_0$) et de sa dérivée ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = d_0$). Selon le domaine physique étudié, cela se retranscrira généralement en position et vitesse initiales en mécanique ou en tension et courant initiaux en électricité.

Il reste à voir la méthode à appliquer pour résoudre l'étape 1 :

Solution générale de l'équation homogène $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = 0$

Idée : on cherche, comme pour une équation d'ordre 1, la solution sous forme d'une exponentielle :

$$y(t) = \lambda\, e^{pt}$$

Les constantes λ_1, λ_2, A et B sont quelconques, leur valeur sera déterminée lors de l'étape de résolution du problème de Cauchy. Cependant, le signal $y(t)$ correspondant à une grandeur physique mesurable, il est <u>réel</u>. On en déduit que <u>les constantes A et B sont des réels quelconques</u>.

Écriture alternative

On part de

$$y(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Loi : Solution de l'équation homogène d'un oscillateur harmonique

Pour un oscillateur harmonique dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = 0$$

la solution générale s'écrit sous les deux formes suivantes :

$$\boxed{y(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t) = C\,\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

où A, B, C et φ sont les constantes d'intégration avec $(A,\,B) \in \mathbb{R}^2$, $C \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \,]-\pi\,;\,\pi]$.

Remarque : une troisième forme possible, plus rarement utilisée, est

$$y(t) = D\,\sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{avec} \quad D \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \phi \in \,]-\pi\,;\,\pi]$$

Équivalence des deux écritures

Pour passer d'une forme à l'autre, on applique la formule trigonométrique déjà utilisée plus haut

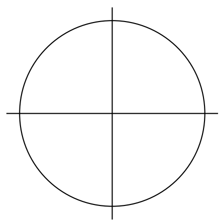
$$y(t) = C\,\cos(\omega_0 t + \varphi) = C\,[\cos(\omega_0 t)\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\sin\varphi]$$

— Par identification des termes en cos et sin, on a directement

— Dans l'autre sens, on a

La détermination de φ est plus subtile : on peut écrire

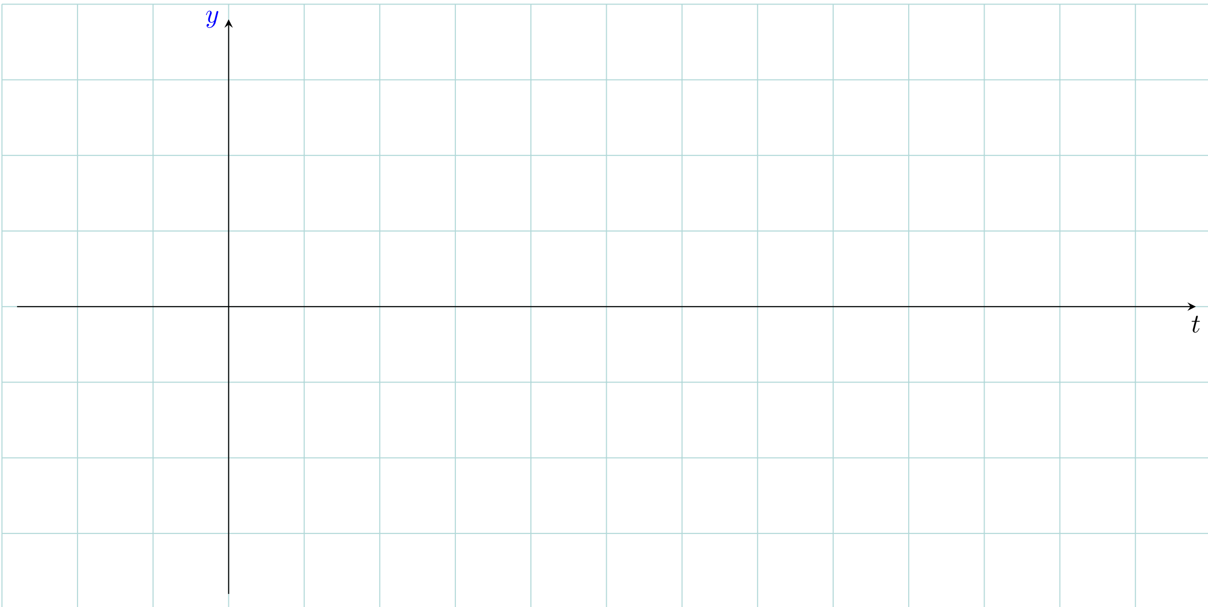
mais le passage par la fonction arctangente doit être fait avec précaution : celle-ci donne des valeurs dans l'intervalle $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ alors que φ est compris dans $]-\pi\,;\,\pi]$. Le problème se pose lorsque $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$ soit $A < 0$. On a alors



III.2 - Caractéristiques de la solution

La solution est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω_0. L'allure du chronogramme est donc le suivant :

Application :



Le cosinus étant 2π-périodique, on en déduit la période T du signal grâce à $\omega_0 T = 2\pi$:

Loi : Relations pulsation–période–fréquence

Rappels : T est un temps et s'exprime en s ; f et ω_0 sont homogènes à l'inverse d'un temps mais ω_0 s'exprime en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et f en Hz.

a - Solution sous la forme $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Cette écriture permet d'exprimer simplement les conditions initiales

b - Solution sous la forme $y(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Cette écriture permet d'interpréter physiquement le signal.

C est appelée **amplitude du signal** et φ **phase à l'origine**

Remarques :

- On appelle également valeur crête à crête la grandeur $Y_{CC} = Y_{\max} - Y_{\min}$. Pour un signal sinusoïdal, on a évidemment $Y_{CC} = 2C$.
- En anglais, l'amplitude est confondue avec la valeur crête à crête (ou *peak-to-peak*). Cela est particulièrement important en TP puisque les instruments utilisés (GBF, oscilloscopes,...) utilisent la norme anglosaxonne : si vous souhaitez avoir un signal d'amplitude « réelle » 5 V, il faudra régler l'amplitude du GBF à 10 V !
- La dérivée du signal est donnée par

  On dit que | la dérivée / la vitesse / le courant | est en | **quadrature avance** / **avance de phase** de $\pi/2$ | sur | le signal / la position / la tension .
- La dérivée seconde du signal est donnée par

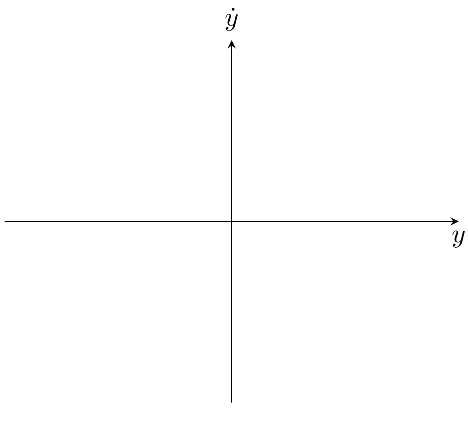
  On dit que | la dérivée / l'accélération | est en **opposition de phase** par rapport | au signal / à la position .

c - Portrait de phase

On rappelle que le portrait de phase d'un signal $y(t)$ est la courbe paramétrée $(y(t)\,;\,\dot{y}(t))$.

Application : Portrait de phase d'un oscillateur harmonique

On a $y(t) = y(t) = C\,\cos(\omega_0 t + \varphi)$
et $\dot{y}(t) = -C\omega_0\,\sin(\omega_0 t + \varphi)$.
On a alors



Remarque : le sens de parcours sur le portrait de phase doit être indiqué systématiquement. Lorsqu'on est au dessus de l'axe des abscisses, $\dot{y} > 0$: y est croissant. À l'inverse, en dessous de l'axe des abscisses, $\dot{y} < 0$ et y est décroissant. On en déduit que l'ellipse est parcourue dans le sens horaire sur le portrait de phase.