OS – Chapitre J Correction

Oscillateur harmonique

Exercice : Différentes configurations de ressort

Dans tous les cas, $\vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est la direction de l'allongement du ressort au point où on considère la force de rappel. Les difficultés consistent à identifier la direction d'allongement et à exprimer correctement la longueur du ressort en fonction de la coordonnée de position x, sachant que x peut être positif où négatif suivant la position du point M par rapport à l'origine O.

Cas A : $\vec{u} = \vec{u}_{OM} = \vec{u}_x$ et $l = x$, donc $\boxed{\vec{F} = -k\,(x - l_0)\,\vec{u}_x}$.

Cas B : $\vec{u} = \vec{u}_{OM} = -\vec{u}_x$ et $l = -x$, donc $\vec{F} = -k\,(-x - l_0)\,(-\vec{u}_x)$ et $\boxed{\vec{F} = k\,(-x - l_0)\,\vec{u}_x}$.

Cas C : cette configuration est rigoureusement identique à celle du Cas B.

Cas D : cette configuration est rigoureusement identique à celle du Cas A.

Cas E : la longueur du ressort est $x_2 - x_1$ et :

— en M_1, le ressort s'allonge dans la direction $-\vec{u}_x$, donc

$$\vec{F}_{\to M_1} = -k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,\vec{u}_{M_2M_1} = -k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,(-\vec{u}_x) \implies \boxed{\vec{F}_{\to M_1} = k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,\vec{u}_x}$$

— en M_2, le ressort s'allonge dans la direction $\vec{u}_x$, donc

$$\vec{F}_{\to M_2} = -k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,\vec{u}_{M_1M_2} = -k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,(\vec{u}_x)$$

$$\implies \boxed{\vec{F}_{\to M_2} = -k\,(x_2 - x_1 - l_0)\,\vec{u}_x = -\vec{F}_{\to M_1}}$$

Remarque : le cas E est un modèle simple de molécule chimique avec liaison covalente entre deux atomes. La liaison covalente est modélisée par le ressort et les atomes par les deux masses ponctuelles. La distance à l'équilibre entre les deux masses correspond à la longueur de liaison. L'énergie potentielle élastique à l'équilibre correspond à l'énergie de liaison (c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour rompre la liaison chimique).

Exercice : Équations différentielles

1. L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique à une dimension selon l'axe des y peut se mettre sous la forme
$$\forall t,\ \ddot{y} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{eq}, \quad y \in \mathbb{R},\ \omega_0 \in \mathbb{R}^{+*}$$
On essaie d'identifier les équations fournies avec la forme canonique ci-dessus, en normalisant les équations avec un facteur égal à un devant la dérivée seconde, un coefficient positif devant le terme non dérivé et en passant les termes constants au second membre.

   (a) $\forall t,\ \ddot{y} - \frac{k}{m} y(t) = -\frac{k}{m} l_0$
   (b) $\forall t,\ \ddot{y} - \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0$
   (c) $\forall t,\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0$
   (d) $\forall t,\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = -\frac{k}{m} l_0$
   (e) $\forall t,\ \ddot{y} - \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0 + g$
   (f) $\forall t,\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{k}{m} l_0 - g$

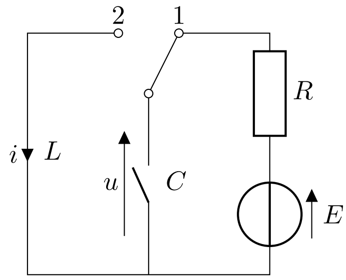
   Seules les équations (c), (d) et (f) sont des équations d'oscillateur harmonique. Pour les équations (a), (b) et (e), l'identification mènerait à $\omega_0^2 = -\frac{k}{m}$ ce qui est impossible puisque que k et m sont positifs.

2. Identifications :

   (c) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $y_{eq} = l_0$; (d) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $y_{eq} = -l_0$; (f) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $y_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$.

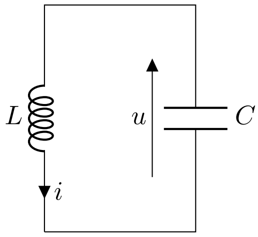
Exercice : Oscillateur harmonique : circuit LC

1. En $t = 0^-$, l'interrupteur est en position 1 et le circuit a atteint un régime permanent stationnaire. Il est donc équivalent au circuit ci dessous :
   On en déduit directement $i(t = 0^-) = 0$ et $u(t = 0^-) = E$.



   On a alors :
   — Par continuité du courant dans une bobine
   $$\boxed{i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0}$$
   — Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur
   $$\boxed{u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = E}$$

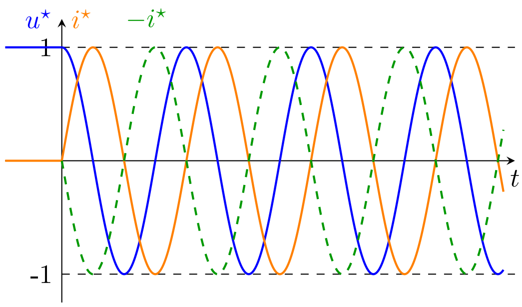
2. En $t > 0$ le circuit est le suivant (on peut omettre la branche avec E et R puisqu'elle est ouverte et n'interviendra pas dans l'expression de u) :



   Le courant i est le courant qui traverse la bobine mais également le condensateur, la tension u est la tension aux bornes du condensateur mais également de la bobine.
   La bobine est en convention récepteur, on a donc $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
   Le condensateur est en convention générateur, on a donc $i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
   On combine les deux équations, ce qui donne
   $$u = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = -LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$
   que l'on peut mettre sous forme canonique :
   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

3. On peut directement écrire $u(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$.
   L'expression de i s'obtient en dérivant u :
   $$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\omega_0\left[A\,\sin(\omega_0 t) - B\,\cos(\omega_0 t)\right]$$
   On résout le problème de Cauchy pour déterminer A et B :
   $$i(t = 0) = 0 \implies B = 0$$
   $$u(t = 0) = E \implies A = E$$
   Finalement
   $$\boxed{u(t) = E\,\cos(\omega_0 t)} \quad \text{et} \quad \boxed{i(t) = EC\omega_0\,\sin(\omega_0 t) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\sin(\omega_0 t)}$$

4. On construit les grandeurs réduites :
   $$\boxed{u^\star = \frac{u}{E} = \cos(\omega_0 t)} \text{ et } \boxed{i^\star = \frac{i}{E}\sqrt{\frac{L}{C}} = \sin(\omega_0 t)}.$$
   Les chronogrammes sont donnés ci-contre :



   Remarque : aux bornes des dipôles et en convention récepteur
   — $i_L = i$ est en quadrature retard sur $u_L = u$: comportement inductif ;
   — $i_C = -i$ est en quadrature avance sur $u_C = u$: comportement capacitif.