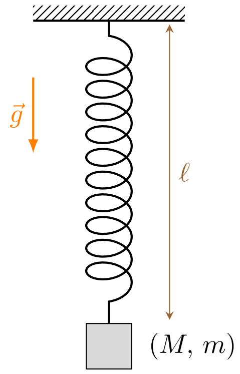
OS – Chapitre K

Oscillateur amorti en régime libre

I - Oscillateur mécanique amorti

I.1 - Mise en situation : système masse–ressort

On considère un point matériel M, de masse m, accroché à l'extrémité d'un ressort vertical, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. On se place dans le référentiel terrestre, que l'on supposera galiléen et on admet que le point M est également soumis à une force de frottement de type visqueux : $\vec{f} = -h\,\vec{v}$ où h est le coefficient de frottement (en $\mathrm{kg\,s^{-1}}$).



Les forces qui s'exercent sur le point M sont son poids $\overrightarrow{P}$, le rappel du ressort $\overrightarrow{F_R}$ et la force de frottement $\vec{f}$.

On choisit un axe (Ox) vertical vers le bas où O est l'extrémité fixe du ressort. On admet que le mouvement est uniquement vertical.

I.2 - Mise en équation

Cinématique

Forces

Relation Fondamentale de la dynamique

$$\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

On projète sur(Ox) (*ie* on multiplie scalairement par $\vec{u}_x$) :

On réécrit pour mettre sous forme canonique

Forme canonique de l'équation différentielle

Dimension de ω_0 et Q :

Variable centrée : $X = x - x_{\text{eq}}$

Remarque : en supprimant les frottements (*ie* en prenant $h = 0$), on retrouve bien l'équation de l'oscillateur harmonique vue au chapitre OS-J :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}} \quad \text{avec} \quad \sqrt{\frac{k}{m}}$$

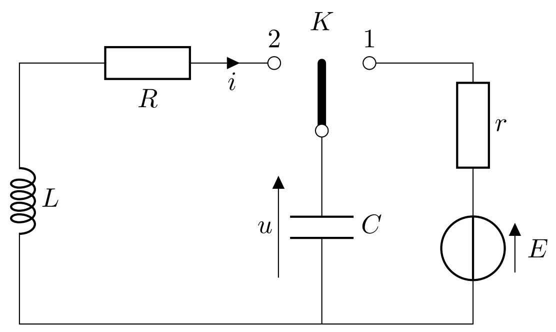
I.3 - Aspect énergétique

On part de la RFD, que l'on multiplie par $v_x = \dot{x}$:

II - Oscillateur amorti en électricité

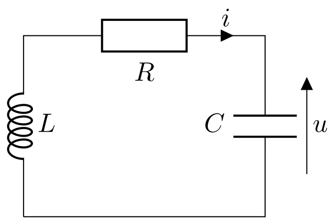
II.1 - Mise en situation : circuit RLC

On considère un circuit constitué d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C et d'un résistor de résistance R en série. Le condensateur est initialement chargé par un générateur de Thévenin de fem E et de résistance r. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur K de la position (1) à la position (2). .



II.2 - Mise en équation

On représente le circuit en $t > 0$ en indiquant les grandeurs utiles.



Mise sous forme canonique

Dimension de ω_0 et Q : L'analyse dimensionnelle est strictement similaire à celle menée sur l'oscillateur en mécanique. On a donc toujours ω_0 en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et Q sans unité.

Équation en i

L'équation en i peut s'obtenir en dérivant l'équation canonique précédente et en écrivant $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$:

II.3 - Aspect énergétique

Bilan de puissance et énergie des dipôles

La variation temporelle de l'énergie dans le circuit (*ie* stockée dans le condensateur et la bobine) est égale à la puissance agébrique apportée au circuit (*ie* puissance *apportée* par le générateur et puissance *dissipée* dans la résistance par effet Joule) :

Méthode inverse

On part de la loi des mailles/de l'équation canonique, on multiplie par i pour avoir des grandeurs homogènes à des puissances et on en déduit le bilan énergétique.

III - Comportement temporel de l'oscillateur amorti

III.1 - Méthode générale

La méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre est strictement identique à celle vue pour résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique. La seule différence sera au niveau de la recherche de la solution générale de l'équation harmonique.

Méthode : Résolution de l'équation canonique d'un oscillateur amorti

Soit une équation d'un oscillateur amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = f(t) = \omega_0^2 y_0(t)$$

où ω_0 est la **pulsation propre** du système [1] et Q le **facteur de qualité**. La solution de cette équation est obtenue en appliquant les étapes successives suivantes :

1. On cherche $y_h(t)$ la solution générale de l'équation homogène (ou sans second membre) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_h}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y_h = 0$$

2. On cherche une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation avec second membre.
3. La solution générale de l'équation avec second membre est alors

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

4. On résout le problème de Cauchy : on cherche la solution qui passe par les conditions initiales.

Concernant l'étape 2 (solution particulière y_p), nous nous limiterons dans le cadre de ce chapitre au cas où le second membre est constant (oscillateur amorti en régime libre) ; on pourra chercher y_p sous la forme d'une constante (et on aura alors $y_p = y_0$).

Remarque : on peut retrouver l'équation canonique sous une autre forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\omega_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_0$$

où $\alpha = {}^1\!/_{2Q}$ est le facteur d'amortissement.

III.2 - Équation canonique homogène

Solution générale de l'équation homogène $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$

Idée : on cherche la solution sous la forme : $y(t) = \lambda\, e^{pt}$.

1. C'est-à-dire la pulsation de l'oscillateur harmonique associé, sans les pertes énergétiques (frottements ou effet Joule).

Définition : Équation caractéristique

Équation du second ordre associée à l'équation différentielle homogène d'ordre 2 où les coefficients des termes d'ordre égal sont identiques dans les deux équations.
Pour une équation sous forme canonique :

Nature des racines de l'équation caractéristique

Loi : Les différents régimes transitoires

- $Q < \frac{1}{2}$ (*ie* $\Delta > 0$) : régime apériodique
- $Q > \frac{1}{2}$ (*ie* $\Delta < 0$) : régime pseudopériodique
- $Q = \frac{1}{2}$ (*ie* $\Delta = 0$) : régime critique

III.3 - Régime apériodique $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$

Racines de l'équation caractéristiques

$\Delta > 0$: il y a deux racines réelles distinctes

Solutions de l'équation homogène

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont du type

A et B sont des constantes d'intégration, leur valeur sera déterminée d'après les conditions initiales, en résolvant le problème de Cauchy.

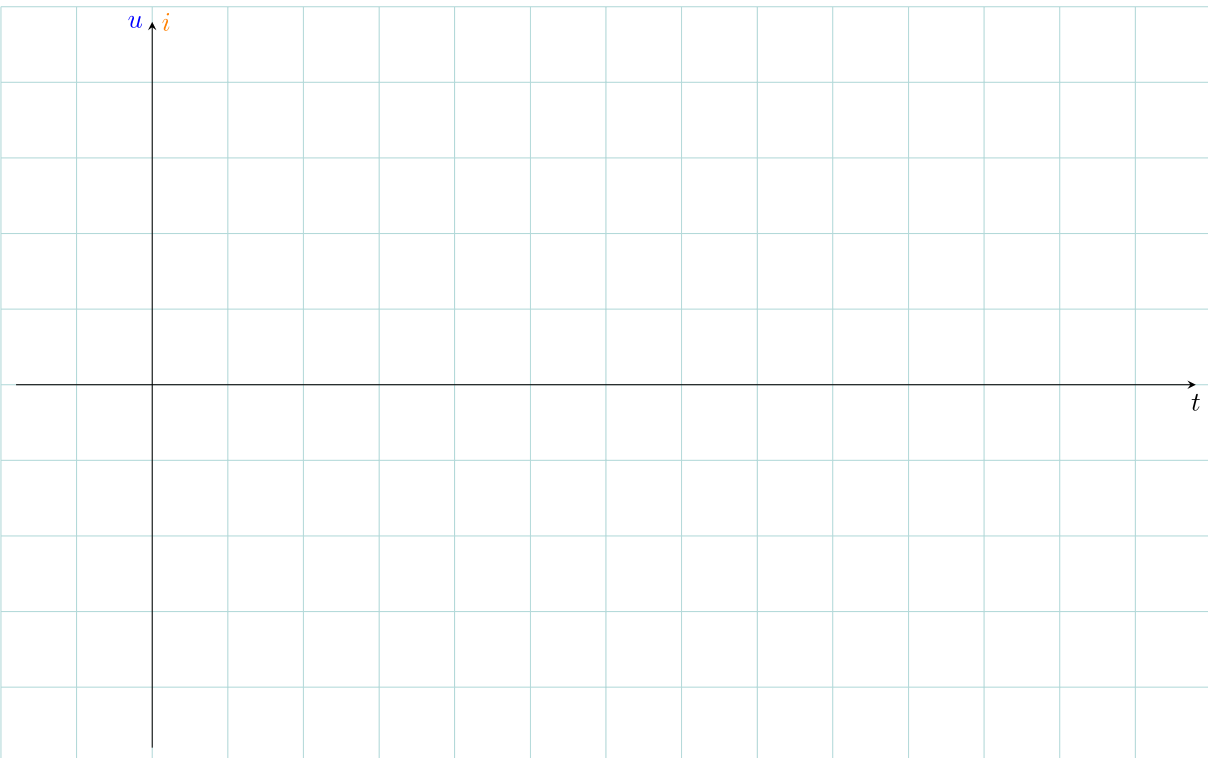
Remarque : $\tau_1 < \tau_2$ donc $\frac{t}{\tau_1} > \frac{t}{\tau_2}$: pour $t \gg \tau_2$, le terme en $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ sera négligeable devant celui en $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ et on aura

$$\text{pour } t \gg \tau_2, \quad y(t) \approx B\,e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Application : Circuit RLC

On cherche les solutions complètes pour u et i pour le circuit défini au II. On se place en régime apériodique, on a donc

A et B sont donnés par les conditions initiales :



III.4 - Régime pseudopériodique $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$

Racines de l'équation caractéristiques

$\Delta < 0$: il y a deux racines complexes conjuguées

temps de relaxation

pseudo-pulsation

pseudo-période

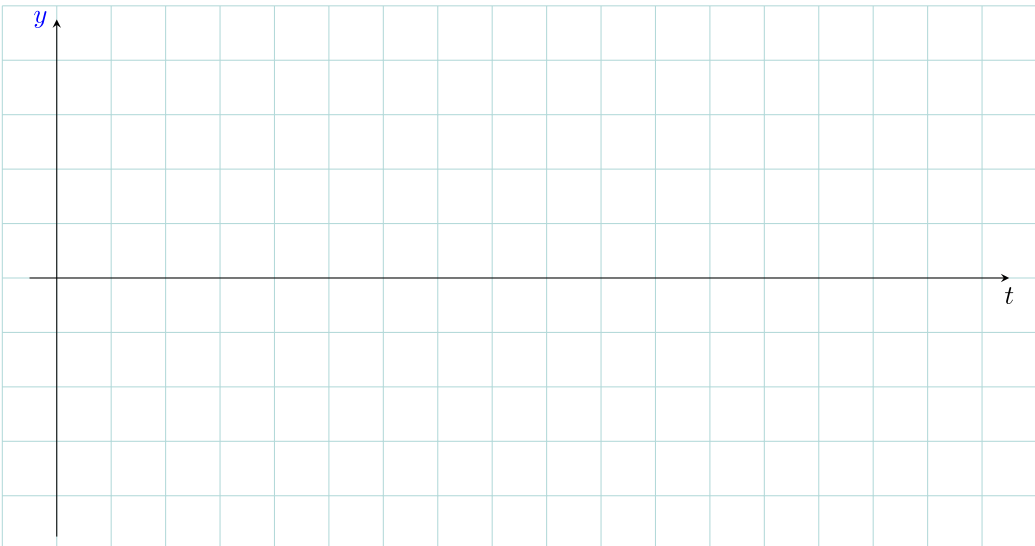
Solutions de l'équation homogène

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont du type

A et B, C et φ sont des constantes d'intégration, C est l'amplitude ($C \geq 0$) et φ la phase à l'origine ($-\pi < \varphi \leq \pi$).

Application : Allure du chronogramme

On peut tracer le chronogramme pour $\varphi = 0$



Remarques :

- si $Q \to +\infty$ alors
- si $Q \gg 1$ alors $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

III.5 - Régime critique $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$

Racines de l'équation caractéristiques

$\Delta = 0$: il y a une racine réelle double

Solutions de l'équation homogène

On admet que les solutions de l'équation différentielle homogène sont du type

A et B sont des constantes d'intégration, leur valeur sera déterminée d'après les conditions initiales, en résolvant le problème de Cauchy.

III.6 - Interprétation physique

a - Régime transitoire

On peut remarquer que, dans les trois situations (régimes apériodique, pseudopériodique ou critique), on a toujours

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

Propriété :

L'équation homogène modélise uniquement le comportement de y pendant le régime transitoire. Le comportement de y en régime permanent (pour $t \gg \tau$) dépend uniquement du terme de forçage (*ie* du second membre de l'équation différentielle).

En gardant la même définition pour la durée du régime transitoire que pour les systèmes du premier ordre (temps nécessaire pour que le signal atteigne 99 % de sa valeur finale), on conserve la même relation : la durée du régime transitoire est de 5τ (ou 3τ pour atteindre 95 % de la valeur finale) avec, en régime apériodique, $\tau = \max(\tau_1, \tau_2) = \tau_2$.

On peut alors comparer les différents régimes :

- en régime critique : $\tau_c = \frac{1}{\omega_0}$;
- en régime apériodique : $\tau_{\text{ap}} = \tau_2 = \frac{2Q}{\omega_0\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right)} > \tau_C$;
- en régime pseudopériodique :$\tau_{\text{pp}} = \frac{2Q}{\omega_0} > \tau_C$ puisque $Q > \frac{1}{2}$.

On peut en conclure que le régime critique est le régime pour lequel l'amortissement est le plus rapide.

b - Oscillateur mécanique

Pour le système masse–ressort, on a vu $Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}$.
Le régime critique est atteint lorsque $Q = \frac{1}{2}$ donc pour

$$h_c = 2\sqrt{mk}.$$

- ☐ si $h < h_c$: frottements faibles. On a alors $Q > 1/2$: régime pseudo-périodique → oscillations amorties avec $T > T_0$.
- ☐ si $h > h_c$: frottements importants. On a alors $Q < 1/2$: régime apériodique → amortissement sans oscillations.

c - Oscillateur électrique

Pour le circuit RLC série, on a vu $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
Le régime critique est atteint lorsque $Q = \frac{1}{2}$ donc pour

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- ☐ si $R < R_c$: dissipation faible. On a alors $Q > 1/2$: régime pseudo-périodique.
- ☐ si $R > R_c$: dissipation importante. On a alors $Q < 1/2$: régime apériodique.

III.7 - Portrait de phase

On rappelle que le portrait de phase d'un signal $y(t)$ est la courbe paramétrée $(y(t)\,;\,\dot{y}(t))$.

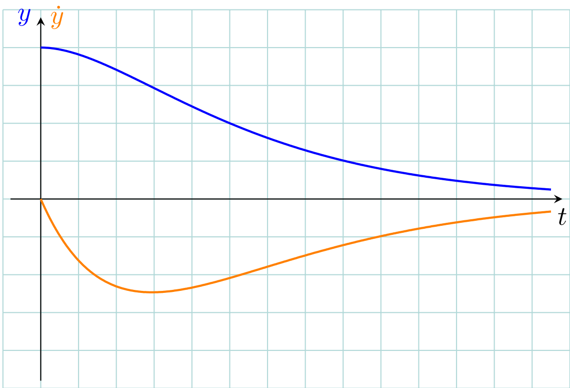
Pour le système masse–ressort en mécanique, il s'agira donc de la courbe $(x(t),\, v_x(t))$. Pour le circuit RLC série en électrocinétique, il s'agira de la courbe $(u(t),\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i(t)}{C})$.

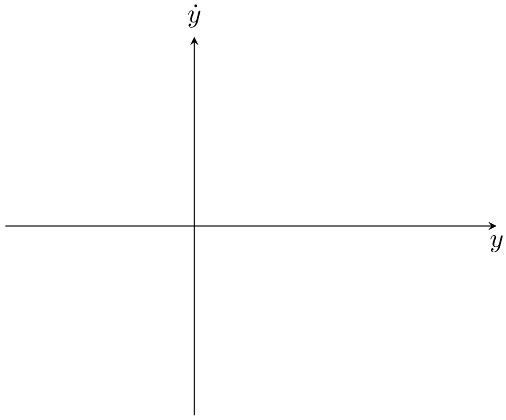
Remarques :

- En régime libre, le régime permanent est stationnaire (*ie* $y_{rp} = \text{cste}$ et donc $\dot{y}_{rp} = 0$) : l'attracteur se situe nécessairement sur l'axe des abscisses.
- Lorsque la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, $\dot{y} > 0$: le portrait de phase est parcouru dans le sens des y croissants.
- Lorsque la courbe est en-dessous de l'axe des abscisses, $\dot{y} < 0$: le portrait de phase est parcouru dans le sens des y décroissants.

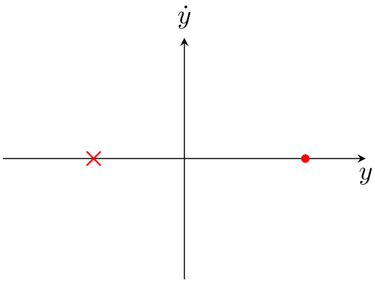
En fonction du type du régime transitoire, on peut distinguer deux comportements différents.

Application : Portrait de phase d'un oscillateur amorti en régime apériodique ou critique

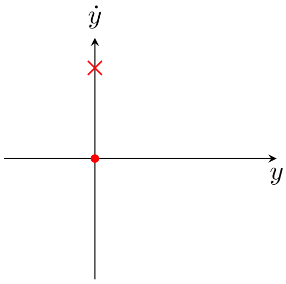




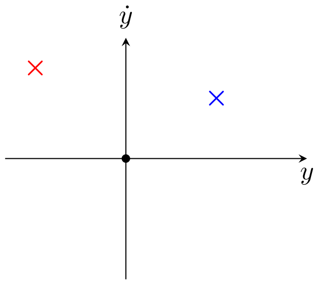
Selon les conditions initiales et la présence d'un second membre dans l'équation diférentielle et des conditions initiales, d'autres configurations sont possibles :



$y_{rp} \neq 0$



$y_0 = 0$, $\dot{y}_0 \neq 0$



$y_0 \neq 0$, $\dot{y}_0 \neq 0$

Application : Portrait de phase d'un oscillateur amorti en régime pseudopériodique