OS – Chapitre L

Oscillateur en régime sinusoïdal forcé

I - Régime sinusoïdal forcé (RSF)

I.1 - Mise en situation

On s'intéresse dans ce chapitre à la réponse d'un système du second ordre à une excitation sinusoïdale. Dans les applications du cours, le système sera soit mécanique (configuration masse–ressort avec amortissement par exemple, avec une terme de forçage sinusoïdal), soit électrique (circuit RLC série par exemple, alimenté par un GBF délivrant un signal sinusoïdal).

Si on note y le signal temporel représentatif du système, le système sera régi par une équation différentielle qui, sous forme canonique s'écrira :

Il n'y a pas de lien entre la pulsation du terme de forçage ω et la pulsation propre du système du second ordre ω_0, ni avec la pseudo-pulsation de l'oscillateur amorti en régime pseudopériodique.

Quels que soient le terme de forçage et les conditions initiales, la solution s'écrit sous la forme

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- y_h est la solution de l'équation homogène et correspond à la réponse transitoire du système. Il est déterminé par les caractéristiques du système, à travers ω_0 et Q et par les conditions initiales.
- y_p est la solution particulière. Elle est indépendante des conditions initiales et peut être obtenue, soit par la méthode de variation de la constante, soit en la « devinant » en la cherchant sous une forme proche du second membre de l'équation. Par exemple, en régime libre où le second membre est constant, on cherche y_p sous la forme d'une constante également.

Quelle que soit la nature du régime transitoire, on sait que $\lim_{t \to +\infty} y_h(t) = 0$: le régime permanent est indépendant du régime transitoire (et donc des conditions initiales) et sera similaire au terme de foçage.
Pour un forçage sinusoïdal, on chercherait alors y_p sous la forme

$$y_p(t) = Y_p \cos(\omega t + \varphi_p)$$

On cherche alors les valeurs des paramètres Y_p et φ_p qui assurent que y_p est bien solution de l'équation différentielle. La mise en œuvre de cette méthode « directe » s'avère être très lourde en pratique : il faut pour cela calculer les dérivées première $\dot{y}_p$ et seconde $\ddot{y}_p$ et identifier les terme en cos et en sin dans l'équation différentielle. Nous verrons à la partie II une méthode alternative qui sera en pratique systématiquement utilisée.

I.2 - Signal sinusoïdal

Définition : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal qui peut s'écrire sous la forme :

Le signal est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, la fréquence est $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Vocabulaire :

— S_0 est l'**amplitude** du signal ($S \geq 0$) ;
— ω est la **pulsation** (exprimée en rad s^{-1} et $\omega > 0$) ;
— φ est la **phase à l'origine** (en rad et $\varphi \in]-\pi\,;\,\pi]$) ;
— $\omega t + \varphi$ est la **phase instantanée** (en rad).

Écriture alternative : $s(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$

— pour passer d'une forme à l'autre on rappelle $\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$;
— on a alors

$$\begin{cases} A = S_m\,\cos\varphi \\ B = -S_0\,\sin\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} S_0 = \sqrt{A^2+B^2} \\ \tan\varphi = -\frac{B}{A} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right) \text{ si } A > 0 \\ \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \text{ si } A < 0 \end{cases} \end{cases}$$

I.3 - Déphasage entre deux signaux

On considère deux signaux sinusoïdaux quelconques :

$$s_1(t) = S_1\,\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s_1(t) = S_1\,\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Les deux signaux sont **synchrones** s'ils ont la même pulsation/période/fréquence.
On définit le

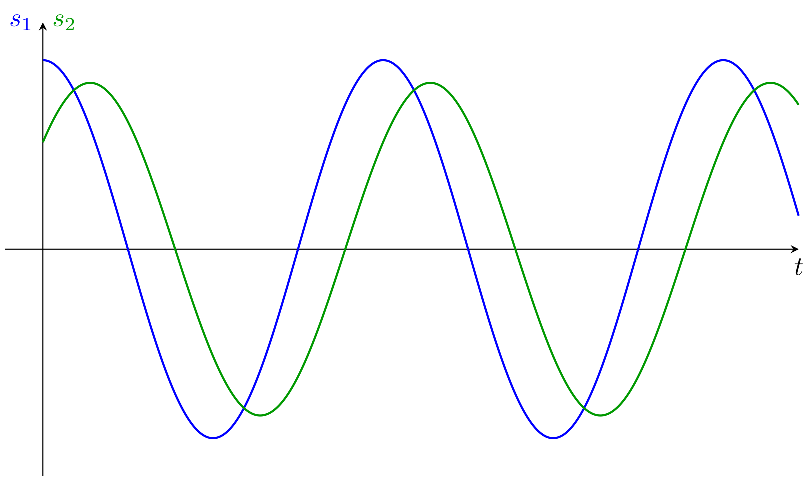
Définition : Déphasage

Si les deux signaux sont synchrones

avec $\Delta\varphi_{2/1} \in]-\pi\,;\,\pi]$

Remarques et vocabulaire

- ☐ $\Delta\varphi_{2/1}$ est le déphasage du signal s_2 par rapport au signal s_1 ;
- ☐ le déphasage du signal s_1 par rapport au signal s_2 est évidemment $\Delta\varphi_{1/2} = -\Delta\varphi_{2/1}$;
- ☐ s_2 est en $\left|\begin{array}{l}\text{avance}\\\text{retard}\end{array}\right.$ s'il atteint son maximum $\left|\begin{array}{l}\text{avant}\\\text{après}\end{array}\right.$ s_1. On a alors $\left|\begin{array}{l}\Delta\varphi_{2/1} > 0\\\Delta\varphi_{2/1} < 0\end{array}\right.$.



☐ Cas particuliers

Signaux en phase	Opposition de phase	Quadrature de phase
$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi = \pm\pi$	$\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

II - Représentation complexe

Remarque préliminaire : en physique, nous noterons j l'imaginaire pur unité : $j^2 = -1$.

II.1 - Définition

Soit un signal sinusoïdal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. On définit le

Définition : Signal complexe associé

$\underline{S_0}$ est appelé amplitude complexe

On a donc $\underline{s}(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi) + j\, S_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Loi : Retour au signal réel

ou encore

On retient que l'amplitude du signal réel est le module de l'amplitude complexe, la phase à l'origine son argument : il suffit de connaître $\underline{S_0}$ pour avoir toutes les informations sur $s(t)$.

II.2 - Opérations en notation complexe

a - Combinaisons linéaires

Soient 2 signaux sinusoïdaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ synchrones (*ie* même pulsation), auquels on associe les deux signaux complexes $\underline{s_1}(t)$ et $\underline{s_2}(t)$.
On définit également le signal réel $s(t)$ issu d'une combinaison linéaire quelconque de $s_1(t)$ et $s_2(t)$:

$$s(t) = \alpha_1\, s_1(t) + \alpha_2\, s_2(t) \quad \text{avec} \quad (\alpha_1,\, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

et son signal complexe associé $\underline{s}(t)$ ($s(t)$ est évidemment un également signal sinusoïdal de pulsation ω). On a alors

Loi : combinaison linéaire de signaux complexes

Démonstration

b - Amplitude et phase

Soient 2 signaux sinusoïdaux $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ synchrones, auxquels on associe les deux signaux complexes $\underline{s_1}(t)$ et $\underline{s_2}(t)$ d'amplitudes complexes respectives $\underline{S_1}$ et $\underline{S_2}$.

Loi : rapport d'amplitude et déphasage

Le rapport des amplitudes des deux signaux est

Le déphasage entre les deux signaux est donné par

Démonstration

c - Dérivation

Soit le signal sinusoïdal $s(t)$ de pulsation ω auquel on associe le signal complexe $\underline{s}(t)$. On a alors

Loi : dérivation en notation complexe

Démonstration

Remarque : on voit directement que $\dot{s}$ est en quadrature avance sur s.

d - Intégration

Soit $s(t)$ un signal sinusoïdal de pulsation ω et $S(t)$ LA primitive de valeur moyenne nulle (*ie* $S(t)$ est également un signal sinusoïdal de pulsation ω). On a alors

Loi : intégration en notation complexe

Démonstration

Remarque : on voit directement que $\int s(t)\,\mathrm{d}t$ est en quadrature retard sur s.

e - Limitations de la notation complexe

Il est important de se rappeler que la notation complexe ne peut être utilisée que

- sur des signaux sinusoïdaux ;
- avec des opérations linéaires.

En particulier, on ne peut pas l'utiliser directement pour des produits ou des quotients :

$$\mathrm{Re}\,(\underline{uv}) \neq \mathrm{Re}\,(\underline{u})\,\mathrm{Re}\,(\underline{v}) \implies \underline{s_1 s_2} = \underline{s_1} \cdot \underline{s_2}$$

et donc

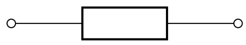
$$u^2 = \mathrm{Re}\left(\underline{u}^2\right) \quad \text{ou} \quad \underline{u\,i} = \underline{u} \cdot \underline{i}$$

ON REPASSE EN RÉEL AVANT TOUTE ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE

III - Impédance complexe (en électrocinétique)

III.1 - Définition

On considère un dipôle en régime sinusoïdal forcé, représenté en convention récepteur.
On note $\underline{u}$ la représentation complexe de la tension u aux bornes du dipôle et $\underline{i}$ la représentation complexe du courant i à travers le dipôle.



Définition : Impédance complexe d'un dipôle

Remarques :

- On a évidemment $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}}$: l'impédance est le rapport des amplitudes complexes de la tension et du courant. On en déduit alors
- $|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right| = \left|\frac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}}\right| = \frac{U_0}{I_0}$: le module de l'impédance est le rapport des amplitudes de la tension et du courant ;
- $\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \varphi_u - \varphi_i$: l'argument de l'impédance est le déphasage de la tension par rapport au courant.
- Par analyse dimensionnelle $[\underline{Z}] = \frac{[\text{tension}]}{[\text{tension}]}$. $\underline{Z}$ et $|\underline{Z}|$ s'expriment en Ω, $\arg \underline{Z}$ est sans dimension et s'exprime en radian.
- On définit également l'**admittance complexe** : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{\underline{i}}{\underline{u}}$. $\underline{Y}$ s'exprime en siemens.

III.2 - Dipôles linéaires

Pour les trois dipôles linéaires passifs vus précédemment, on a

Loi : Impédance complexe des dipôles linéaires

Résistor R	Bobine L	Condensateur C

Résistor de résistance R

$\arg(\underline{Z}_R) = 0 \implies$

Dans un résistor, u et i sont en phase.

Bobine d'inductance L

On a donc

Dans une bobine, u est en quadrature avance par rapport à i (comportement inductif).

- ☐ $\lim\limits_{\omega \to 0} |\underline{Z}_L| = 0$ donc $u \to 0$: en régime permanent (stationnaire), la bobine est équivalente à un fil/interrupteur fermé.
- ☐ $\lim\limits_{\omega \to +\infty} |\underline{Z}_L| = +\infty$ donc $i \to 0$: à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

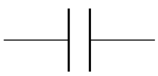
Condensateur de capacité C

On a donc

Dans un condensateur, u est en quadrature retard par rapport à i (comportement capacitif).

- ☐ $\lim\limits_{\omega \to 0} |\underline{Z}_C| = +\infty$ donc $i \to 0$: en régime permanent (stationnaire), le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
- ☐ $\lim\limits_{\omega \to +\infty} |\underline{Z}_C| = 0$ donc $u \to 0$: à très haute fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé/un fil.

Loi : Comportements asymptotiques

Dipôle	Basse fréquence $\omega \to 0$	Haute fréquence $\omega \to +\infty$
Bobine L 		
Condensateur C 		

III.3 - Lois de l'électrocinétique

Propriété :

Toutes les lois linéaires de l'électrocinétique sont généralisables au RSF en notation complexe.

Cela inclut notamment :

- la loi des mailles,
- la loi des nœuds
- les associations de dipôles linéaires :

$$\text{en série : } \quad \underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$
$$\text{en parallèle : } \quad \underline{Z}_\parallel = \frac{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\underline{Z}_\parallel} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

— les ponts diviseurs de | tension / courant

— les modèles de | Thévenin / Norton

— les théorèmes linéaires complémentaires (superposition et Millman)

Application : Association de bobines

Déterminer l'inductance équivalente à deux bobines en série ou en parallèle.

Association en série

Association en parallèle

Application : Association de condensateurs

Déterminer la capacité équivalente à deux condensateurs en série ou en parallèle.

Association en série

Association en parallèle

Exercice : Association de dipôles

Retrouver les résultats précédents en utilisant uniquement les lois de Kirchhoff, sans passer par les impédances complexes.

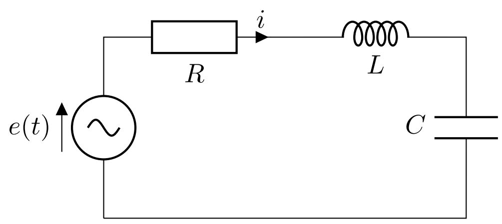
IV - Résonance en intensité dans un circuit RLC série

IV.1 - Mise en situation

On considère un circuit RLC série alimenté par une source de tension sinusoïdale de fem

$$e(t) = E_0 \cos \omega t.$$

On cherche à exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit.



Mise en équation

On annote le schéma et on écrit la loi des mailles

La solution générale de cette équation est

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)$$

i_h est la solution générale de l'équation homogène. On sait que celle-ci correspond au régime transitoire, donc une fois celui-ci terminé ($t > 5\tau$), $i_h(t) \approx 0$ et alors $i(t) = i_p(t)$. Le courant dépend uniquement du terme de forçage. Celui-ci étant sinusoïdal de pulsation ω, i_p et donc i seront de la même forme on pourra alors écrire

$$\boxed{i(t) = i_p(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$

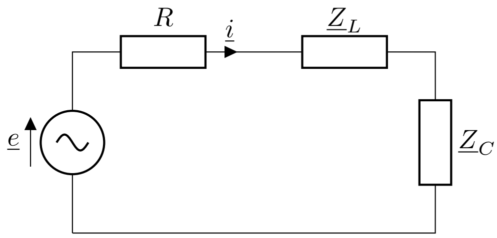
Il reste « seulement » à déterminer les valeurs de l'amplitude I_0 et de la phase à l'origine φ qui assurent que $i(t)$ est bien solution de l'équation différentielle. Plutôt que de mener des calculs complexes et lourds avec les fonctions sinusoïdales, il est de loin préférable de passer par la notation complexe.

Équation en notation complexe

En passant en notation complexe, on écrira

IV.2 - Intensité complexe

Le calcul précédent est rarement mené en pratique, on lui préfère largement le calcul plus direct via les impédances complexes. En passant directement le circuit en notation complexe, on a alors :

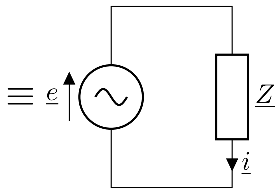


En notant $\underline{Z}$ l'impédance équivalente aux 3 dipôles en série (résistance, bobine et condensateur), on a directement

$$\underline{e} = \underline{Z}\,\underline{i}$$

avec

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C \\ &= R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\end{aligned}$$



Expression de $\underline{i}$ et $\underline{I_0}$

Définition : Pulsation réduite

Pour un système du second ordre caractérisé par sa pulsation propre ω_0, on définit la **pulsation réduite** x par

x est donc une grandeur adimensionnée ($[x] = 1$) qui permet de décrire le comportement du système en fonction de la fréquence/pulsation indépendamment de la valeurs numérique de ω_0, et de comparer plus facilement la réponse d'un système à basse ($x \ll 1$) ou haute ($x \gg 1$) fréquence en le ramenant à une même échelle normalisée.

Expression de $\underline{I}_0(x)$

On a alors directement

IV.3 - Amplitude de l'intensité

Définition : Résonance

La résonance est le phénomène par lequel l'amplitude d'un signal d'un système soumis à une excitation sinusoïdale passe par un maximum en fonction de la fréquence de cette excitation. La fréquence pour laquelle le maximum est atteint est appelée fréquence de résonance.

Amplitude I_0 du courant

Pour un signal sinusoïdal en notation complexe, l'amplitude est $I_0 = |\underline{i}| = |\underline{I_0}|$.
Pour le circuit RLC série on a donc :

Comportement Basse Fréquence (BF, $x \to 0$)

à partir de l'expression de I_0

à partir du schéma
En basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert, le schéma équivalent est alors :

Comportement Haute Fréquence (HF, $x \to +\infty$)

à partir de l'expression de I_0

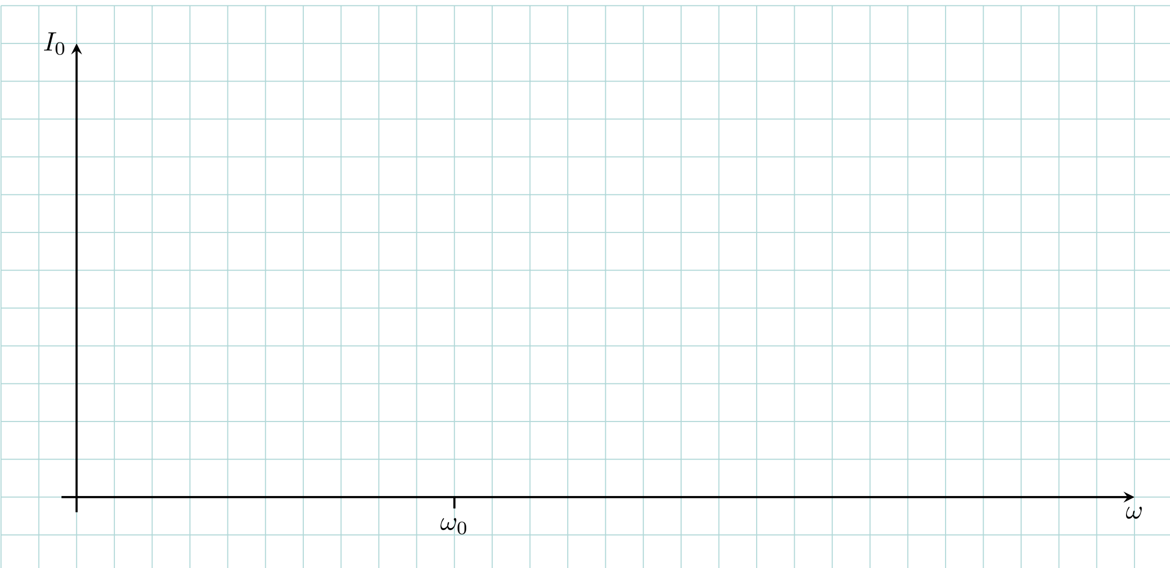
à partir du schéma

En haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur à un fil, le schéma équivalent est alors :

Maximum de I_0

- ☐ $I_0(x)$ est une fonction positive (car I_0 est l'amplitude du courant) qui tend vers 0 quand x tend vers 0 et quand x tend vers l'infini. Elle passe donc nécessairement par un maximum.
- ☐ Dans l'expression de I_0, le numérateur est constant, donc le maximum est atteint lorsque le dénominateur est minimum.
- ☐ À la résonance, on a alors, comme $x - \frac{1}{x} = 0$, $\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R}$ et donc $i = \frac{e}{R}$: la bobine et le condensateur « s'annulent », le circuit a un comportement purement résistif. On peut d'ailleurs vérifier que, pour $x = 1$, soit $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\underline{Z}_L + \underline{Z}_C = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = 0$.

Application : Allure de la courbe $I_0 = f(\omega)$



Loi : Résonance en intensité dans un circuit RLC série

- ☐ Il y a toujours résonance en intensité
- ☐ La résonance est atteinte pour $x = 1$
- ☐ La pulsation de résonance est égale à la pulsation propre du système : $\omega_r = \omega_0$

Définition : Bande passante

Lorsqu'il y a résonance, on définit la **bande passante à -3 dB** comme l'intervalle des pulsations pour lesquelles l'amplitude est supérieure à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$. La largeur $\Delta\omega$ de la bande passante est alors

avec ω_1 et ω_2 tels que

$$I_0(\omega_1) = I_0(\omega_2) = \frac{I_{0,\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \omega_1 < \omega_2$$

Remarques :

— On a les mêmes définitions en terme de fréquence :

$$\Delta f = f_2 - f_1 \quad \text{avec} \quad I_0(f_1) = I_0(f_2) = \frac{I_{0,\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

— Si on augmente Q, le terme en $Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$ décroît plus rapidement lorsque x s'éloigne de 1 :
Plus Q est grand, plus la résonance est aigüe (on parle d'*acuité* de la résonance). On admettra

Loi : Largeur de la bande passante

Pour la résonance en intensité dans un circuit RLC série

IV.4 - Phase de l'intensité

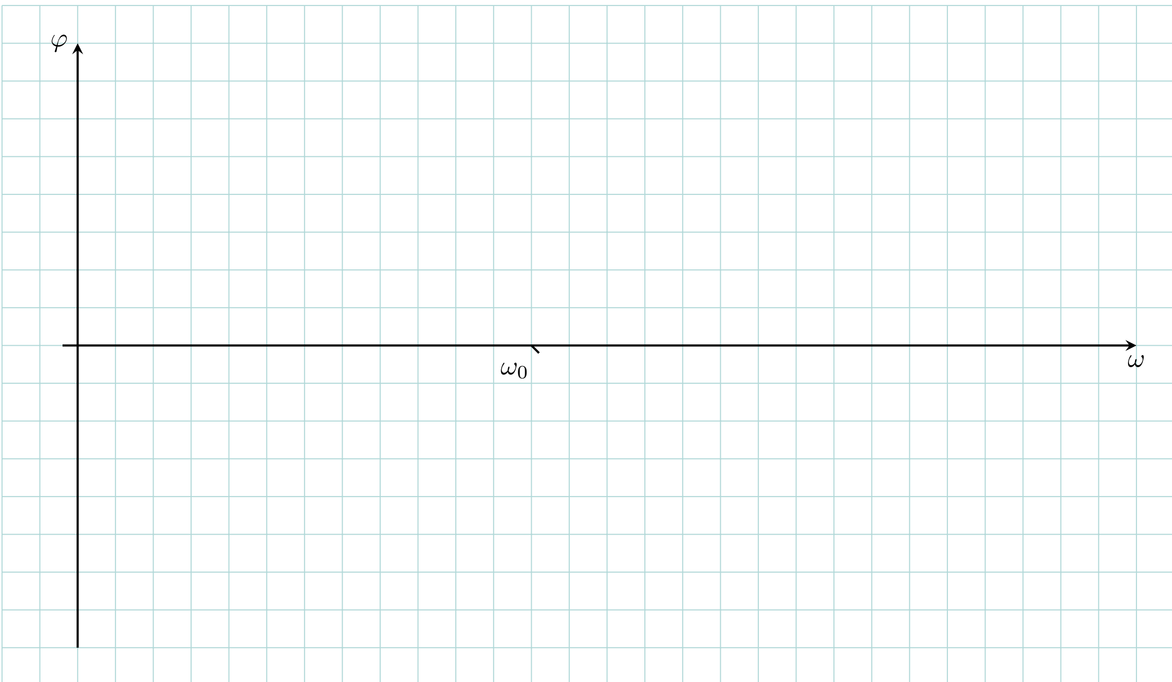
Déphasage de l'intensité

On note φ le déphasage de l'intensité $i(t)$ par rapport à la fem $e(t)$. En passant en notation complexe, on a alors

Comportements asymptotiques

- ☐ à la résonance ($\omega = \omega_r = \omega_0$, $x = 1$) : on a $\varphi_r = 0$. i et e sont en phase : comportement résistif.
- ☐ en basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$, $x \ll 1$) : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$. i est en quadrature avance sur e : comportement capacitif.
- ☐ en haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$, $x \gg 1$) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\dfrac{\pi}{2}$. i est en quadrature retard sur e : comportement inductif.
- ☐ plus Q est grand, plus la transition entre les 2 régimes asymptotiques est « brutale ».

Application : Allure de la courbe $\varphi = f(\omega)$



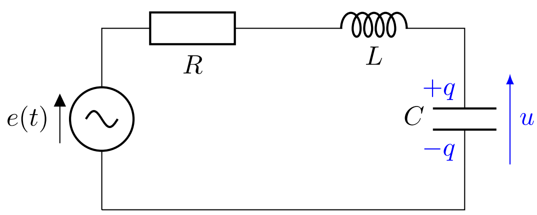
V - Résonance en charge dans un circuit RLC série

V.1 - Mise en situation

On considère un circuit RLC série alimenté par une source de tension sinusoïdale de fem

$$e(t) = E_0 \cos \omega t.$$

On s'intéresse maintenant à la charge $q(t)$ du condensateur, et donc à la tension u à ses bornes puisque $q = Cu$.



En passant en notation complexe, on cherche les expressions de $\underline{q}$ et $\underline{u}$.

Expression de $\underline{u}$

On écrit la relation du pont diviseur de tension

Mise sous forme canonique

On pose comme précédemment $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Pulsation réduite

En posant $x = {}^{\omega}/_{\omega_0}$, on trouve également

V.2 - Amplitude de la tension

Amplitude U_0

Pour un signal sinusoïdal en notation complexe, l'amplitude est $U_0 = |\underline{u}| = |\underline{U_0}|$. On a donc ici

Comportement Basse Fréquence (BF, $x \to 0$)

à partir de l'expression de U_0

à partir du schéma

En basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert, le schéma équivalent est alors :

Comportement Haute Fréquence (HF, $x \to +\infty$)

à partir de l'expression de I_0

à partir du schéma

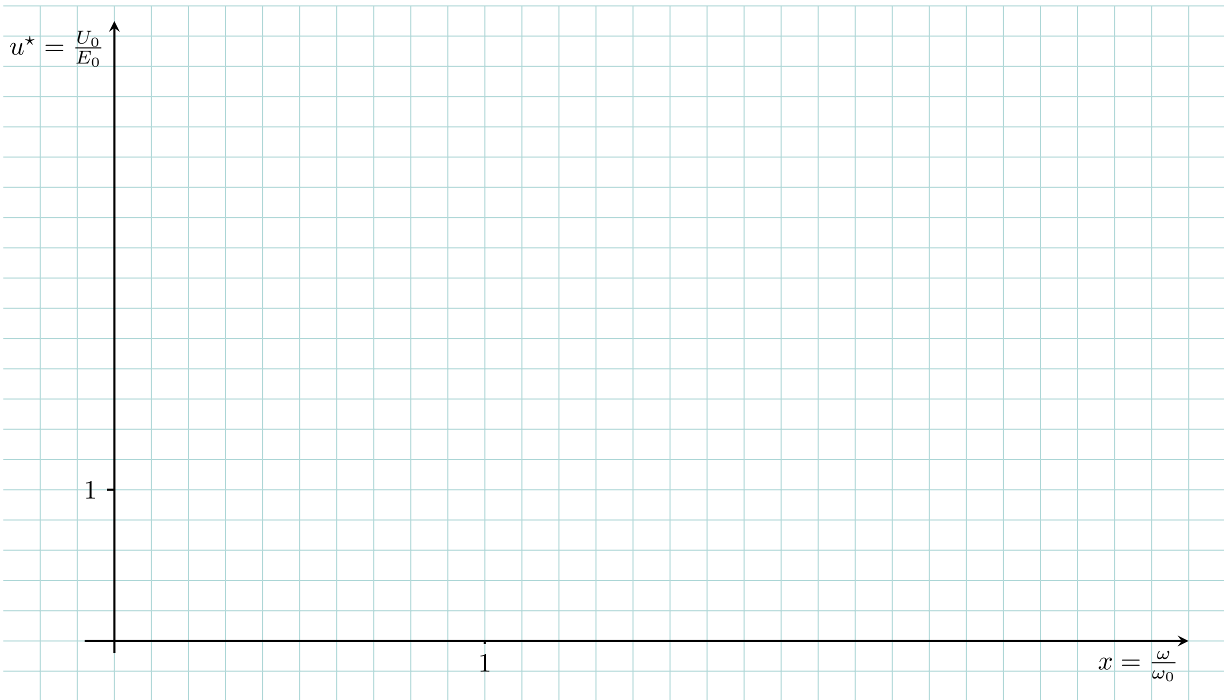
En basse fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur à un fil, le schéma équivalent est alors :

Maximum de U_0 ?

Dans l'expression de U_0, le numérateur est constant, donc le maximum est atteint lorsque le dénominateur est minimum.

Application : Allure de la courbe $U_0 = f(\omega)$

Pour généraliser au maximum les résultats représentés, on utilisera une grandeur réduite $x = \omega/\omega_0$ en abscisse mais également en ordonnée :$u^\star = U_0/E_0$.



Loi : Résonance en charge dans un circuit RLC série

- ☐ Il y a résonance en charge si $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$
- ☐ La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Remarques :

- ☐ On a toujours $\omega_r < \omega_0$ et $U_{0,r} > U_0$.
- ☐ Il ne faut pas confondre la condition de résonance ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$) et la condition pour que le régime transitoire soit pseudopériodique ($Q > \frac{1}{2}$). En particulier, s'il y a résonance en RSF, le régime transitoire préalable était nécessairement pseudopériodique.
- ☐ Il ne faut pas confondre la pulsation de résonance ($\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$) et la pseudo-pulsation du régime pseudopériodique éventuel ($\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$).
- ☐ Si $Q \gg 1$, on retrouve $\omega_r \approx \omega_0$ et on aura également pour la bande passante $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$. Pour $Q \to +\infty$, $U_{0,m} \to +\infty$

V.3 - Phase de la tension

Déphasage de la tension

On note φ le déphasage de la tension aux bornes du condensateur $u(t)$ par rapport à la fem $e(t)$. En passant en notation complexe, on a alors

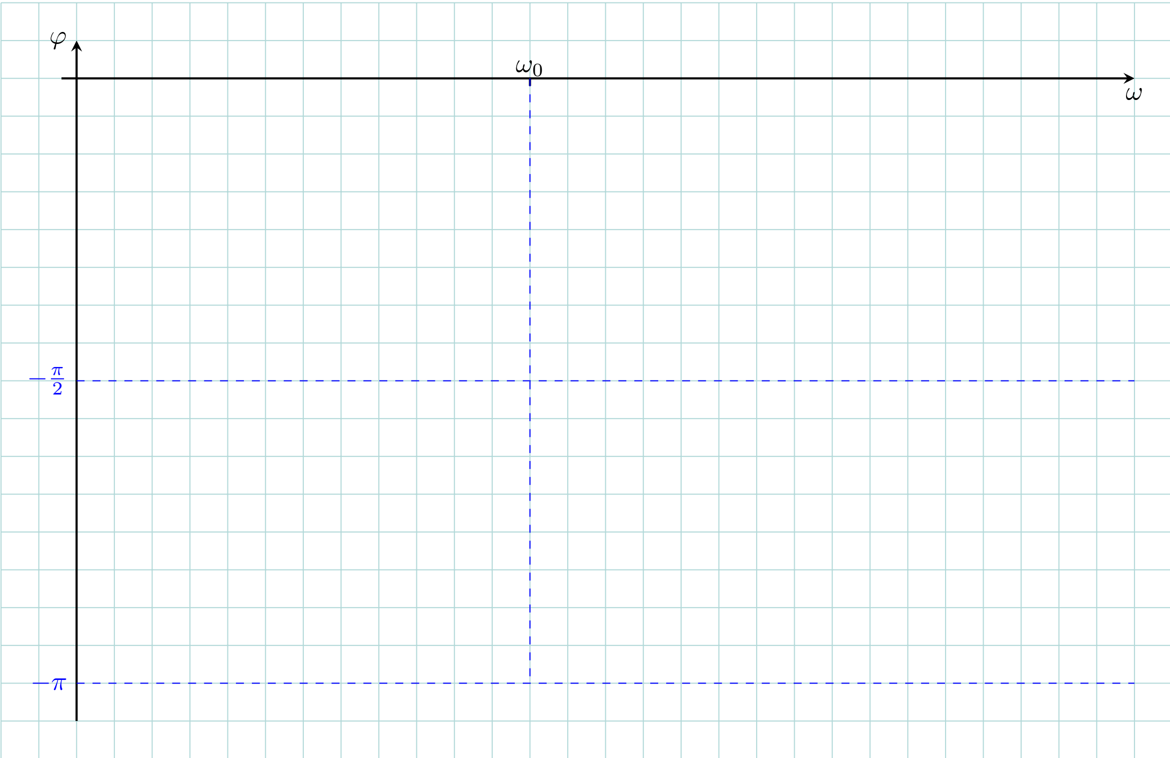
Expression alternative

Comportements asymptotiques

On peut se baser sur l'expression précédente de φ , ou bien directement de $\underline{u} = \dfrac{\underline{e}}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$

- ☐ à la pulsation propre ($\omega = \omega_0$, $x = 1$) : on a $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan(0)$ ou $\underline{u} = \frac{\underline{e}}{\frac{j}{Q}} = -jQ\underline{e}$ et donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. u est en quadrature retard sur e.
- ☐ en basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$, $x \ll 1$) : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ ou $\underline{u} \approx \frac{\underline{e}}{1} = \underline{e}$ et donc $\varphi = 0$. u et e sont en phase.
- ☐ en haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$, $x \gg 1$) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}$ ou $\underline{u} \approx \frac{\underline{e}}{-x^2} = -\frac{\underline{e}}{x^2}$ et donc $\varphi = \pi$. u et e sont en opposition de phase.
- ☐ plus Q est grand, plus la transition entre les 2 régimes asymptotiques est « brutale ».

Application : Allure de la courbe $\varphi = f(\omega)$



VI - Résonance en mécanique – Analogie électromécanique

L'équation différentielle donnant la charge q aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série est :

où $q_f(t)$ est le terme de forçage, avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Pour le système masse–ressort amorti, on a pareillement

où $x_f(t)$ est le terme de forçage, avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{mk}}{h} \quad \text{et} \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Les deux systèmes menant à des équations différentielles mathématiquement identiques, on peut établir une table d'analogies électromécaniques, comparant les grandeurs du système oscillant électrocinétique typique (circuit RLC série) et de l'oscillateur mécanique linéaire typique (système masse–ressort avec amortissement fluide).

Tableau des analogies électromécaniques

Grandeurs électriques		Grandeurs mécaniques	
charge du condensateur	q	élongation du ressort	$x - l_0$
intensité du courant	$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	vitesse de la masse	$v = \dot{x}$
inductance de la bobine	L	masse	m
résistance du circuit	R	coefficient de frottement linéaire	h
capacité du condensateur	C	inverse de la raideur du ressort	$\dfrac{1}{k}$
énergie magnétique	$E_{mag} = \dfrac{1}{2}\,L\,i^2$	énergie cinétique	$E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2$
énergie électrique	$E_{elec} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{q^2}{C}$	énergie potentielle	$E_p = \dfrac{1}{2}\,k\,(x - l_0)^2$
puissance Joule	$P_J = R\,i^2$	puissance des frottements	$P_f = -h\,v^2$