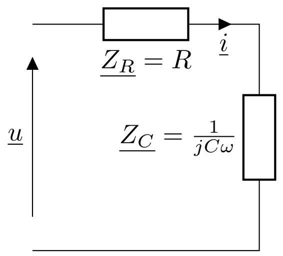
OS – Chapitre L Correction

Oscillations en RSF

.1 - Associations d'impédances

a - Premier circuit

On a deux dipôles, une résistance et un condensateur, en série. L'impédance équivalente est alors

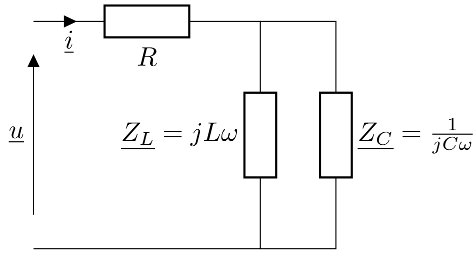


$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C}$$

soit

$$\boxed{\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}}$$

b - Second circuit

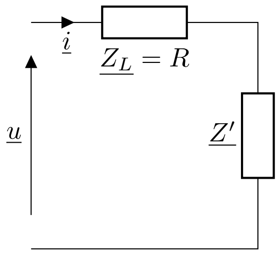


Deux dipôles sont en parallèle, le condensateur et la bobine. Leur impédance équivalente $\underline{Z'}$ est alors donnée par

$$\frac{1}{\underline{Z'}} = \frac{1}{\underline{Z_L}} + \frac{1}{\underline{Z_C}} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1 - LC\omega^2}{jL\omega}$$

et donc

$$\underline{Z'} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}.$$



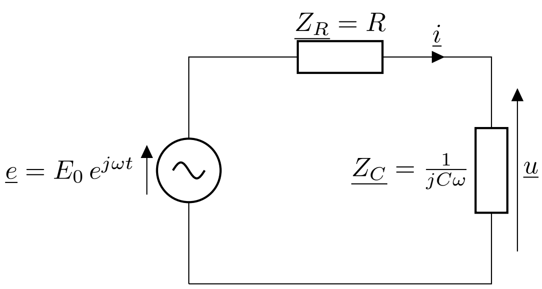
Cette impédance équivalente est elle-même en série avec la résistance. L'impédance équivalente de l'ensemble est ainsi $\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z'}$ soit

$$\boxed{\underline{Z} = R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}$$

.2 - Lois de l'électrocinétique en RSF

a - circuit *RC*

On passe en formalisme complexe.
On a alors $\boxed{\underline{e} = E_0\, e^{j\omega t}}$. On reconnait un pont diviseur de tension et donc



$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}}\underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{e}$$

ou

$$\boxed{\underline{u} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e}}$$

On a également, aux bornes du condensateur, $\underline{u} = \underline{Z_C}\underline{i} = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$ ce qui donne

$$\boxed{\underline{i} = \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}}$$

L'équation différentielle s'obtient en repassant en réel et en interprétant les termes en $j\omega$ par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ (et donc $-\omega^2 = (j\omega)^2$ par $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ pour des circuits d'ordre 2) :

$$\underline{u} = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{e} \implies (1+jRC\omega)\,\underline{u} = \underline{e} \implies RC(j\omega\underline{u}) + \underline{u} = \underline{e}$$

En repassant en réel on a alors

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{e}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = RC \quad \text{équation canonique du circuit RC !}$$

Pour $i(t)$:

$$\underline{i} = \frac{jC\omega}{1+jRC\omega}\underline{e} \implies (1+jRC\omega)\,\underline{i} = jRC\omega\underline{e} \overset{\mathrm{Re}}{\implies} \boxed{RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

Pour déterminer les signaux réels (dans les deux sens du terme !), deux méthodes sont possibles

— Première méthode (rarement employée) : on utilise $u(t) = \mathrm{Re}(\underline{u})$.
On a

$$\underline{u} = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{e} = \frac{1-jRC\omega}{(1+jRC\omega)(1-jRC\omega)}E_0\,e^{j\omega t} = \frac{1-jRC\omega}{1+(RC\omega)^2}E_0\,(\cos\omega t + j\,\sin\omega t)$$

et donc, comme $u(t) = \mathfrak{Re}(\underline{u})$,

$$u(t) = \frac{E_0}{1+(RC\omega)^2}(\cos\omega t + RC\omega\sin\omega t)$$

Au final, les calculs s'avèrent rapidement lours et complexes, donc facilement sources d'erreurs, et le résultat n'est pas directement exploitable en terme d'amplitude et de phase du signal.

— Seconde méthode : on utilise $u(t) = U_0\,\cos(\omega t + \varphi_u)$.
On détermine directement l'amplitude et la phase du signal réel. On sait

$$\frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{U_0}e^{j\omega t}}{\underline{E_0}e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U_0}}{\underline{E_0}} = \frac{U_0e^{j\varphi_u}}{E_0e^{j\varphi_e}}$$

On a alors $\dfrac{U_0}{E_0} = \left|\dfrac{\underline{U_0}}{\underline{E_0}}\right| = \left|\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}}\right| = \left|\dfrac{1}{1+jRC\omega}\right|$ et donc

$$\boxed{U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}}$$

On a également $\varphi_u - \varphi_e = \arg\left(\dfrac{\underline{U_0}}{\underline{E_0}}\right) = \arg\left(\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{1+jRC\omega}\right) = -\arg(1+jRC\omega)$. Ici $\varphi_e = 0$, on a donc

$$\boxed{\varphi_u = -\arctan(RC\omega)}$$

Pour déterminer i, on utilise la seconde méthode en exploitant directement la formule $\dfrac{\underline{i}}{\underline{u}} = \dfrac{1}{\underline{Z_C}} = jC\omega$.
On a alors $i(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi_i)$ avec

$$\frac{I_0}{U_0} = |jC\omega| \quad \text{et donc} \quad \boxed{I_0 = \frac{C\omega E_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}}$$

$$\varphi_i - \varphi_u = \arg(jC\omega) \quad \text{et donc} \quad \boxed{\varphi_i = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)}$$

Remarque : on a bien $\varphi_i - \varphi_u = \frac{\pi}{2}$, le courant est en quadrature avance par rapport à la tension aux bornes du condensateur.

On vérifie la cohérence des comportements asymptotiques

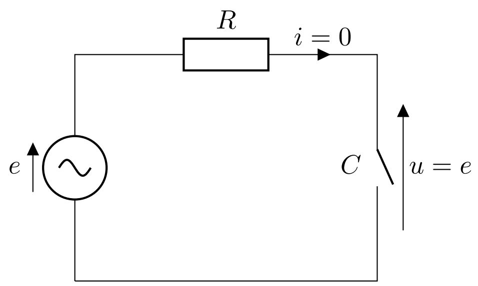
BF : basse fréquence ($\omega \to 0$)

— à partir des expressions. On a

$$\lim_{\omega \to 0} U_0 = E_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to 0} \varphi_u = 0$$

$$\lim_{\omega \to 0} I_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to 0} \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

— à partir des schémas équivalents (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert)



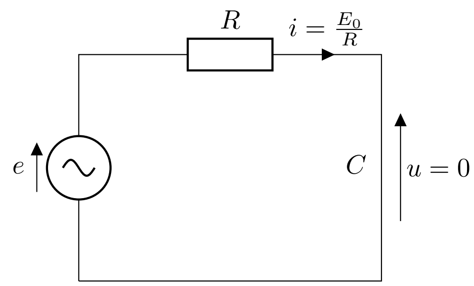
HF : haute fréquence ($\omega \to +\infty$)

— à partir des expressions. On a

$$\lim_{\omega \to +\infty} U_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to +\infty} \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} I_0 = \frac{E_0}{R} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to +\infty} \varphi_i = 0$$

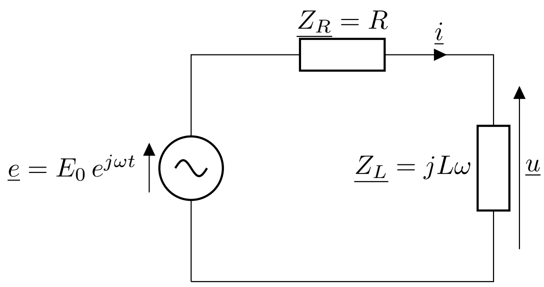
— à partir des schémas équivalents (le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé)



b - circuit *RL*

On passe en formalisme complexe. On a alors $\boxed{\underline{e} = E_0\, e^{j\omega t}}$. On reconnait un pont diviseur de tension et donc

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}}\underline{e} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{u} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{e}}$$



On a également, aux bornes de la bobine, $\underline{u} = \underline{Z_L}\underline{i} = jL\omega\,\underline{i}$ ce qui donne

$$\boxed{\underline{i} = \frac{1}{R + jL\omega}\underline{e}}$$

Les équations différentielles sont obtenues par :

$$(R + jL\omega)\,\underline{u} = jL\omega\underline{e} \overset{\text{Re}}{\Longrightarrow} \boxed{L\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Ru = L\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

$$(R + jL\omega)\,\underline{i} = \underline{e} \overset{\text{Re}}{\Longrightarrow} L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{e}{\tau R}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

On détermine ensuite l'amplitude et la phase des signaux réels : $u(t) = U_0\, \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I_0\, \cos(\omega t + \varphi_i)$

On a $\dfrac{U_0}{E_0} = \left|\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}}\right| = \left|\dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}\right|$ et donc $\boxed{U_0 = \dfrac{L\omega E_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}}$;

$\varphi_u - \varphi_e = \arg\left(\dfrac{\underline{u}}{\underline{e}}\right) = \arg\left(\dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arg\left(R + jL\omega\right)$, soit (comme $\varphi_e = 0$) $\boxed{\varphi_u = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)}$

On a également $\dfrac{I_0}{E_0} = \left|\dfrac{\underline{i}}{\underline{e}}\right| = \left|\dfrac{1}{R + jL\omega}\right|$ et donc $\boxed{I_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}}$;

$$\varphi_i - \varphi_e = \arg\left(\frac{\underline{i}}{\underline{e}}\right) = \arg\left(\frac{1}{R + jL\omega}\right) = -\arg\left(R + jL\omega\right), \text{ soit } \boxed{\varphi_i = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)}$$

Remarque : on a bien $\varphi_i - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$, le courant est en quadrature retard par rapport à la tension aux bornes de la bobine.

On vérifie la cohérence des comportements asymptotiques

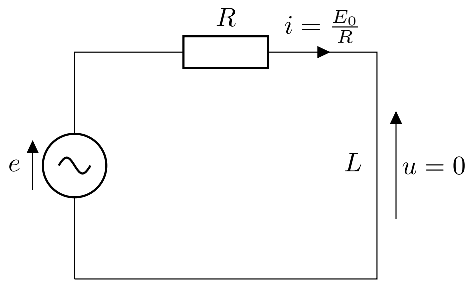
BF : basse fréquence ($\omega \to 0$)

— à partir des expressions. On a

$$\lim_{\omega \to 0} U_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to 0} \varphi_u = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to 0} I_0 = \frac{E_0}{R} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to 0} \varphi_i = 0$$

— à partir des schémas équivalents (la bobine se comporte comme un interrupteur fermé)



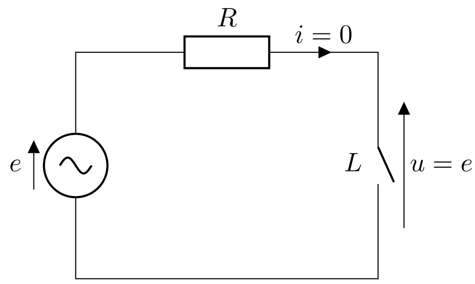
HF : haute fréquence ($\omega \to +\infty$)

— à partir des expressions. On a

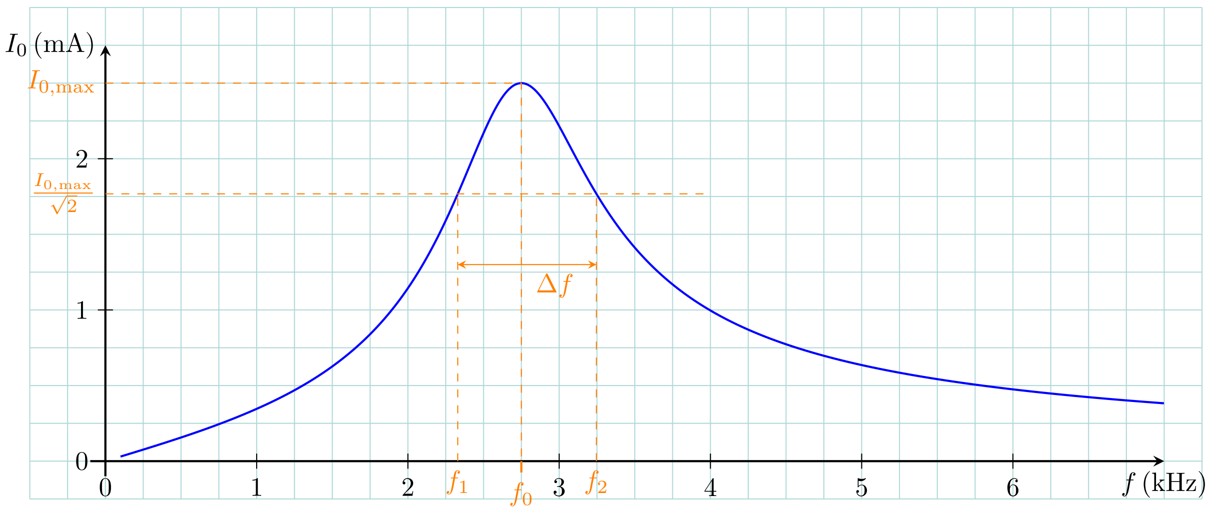
$$\lim_{\omega \to +\infty} U_0 = E_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to +\infty} \varphi_u = 0$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} I_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \to +\infty} \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

— à partir des schémas équivalents (la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert)



.3 - Résonance en intensité dans un circuit RLC série



— On lit sur la courbe : $\underline{f_r = 2{,}75\,\text{kHz}}$, $f_1 = 2{,}3\,\text{kHz}$ et $f_2 = 2{,}25\,\text{kHz}$. Comme $\Delta f = f_2 - f_1$, on en déduit $\underline{\Delta f = 0{,}95\,\text{kHz}}$.

— Pour la résonance en <u>intensité</u>, on sait $f_r = f_0$ soit $\underline{f_0 = 2{,}75\,\text{kHz}}$ et avec $\omega = 2\pi f$, $\underline{\omega_0 = 17{,}3 \cdot 10^3\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}}$.

— Pour la résonance en intensité, on sait également $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$ et donc $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{2{,}75}{0{,}95}$ soit $\underline{Q \approx 3}$.