

OS – Chapitre M

Filtrage linéaire

I - Signaux périodiques

I.1 - Définitions

Définition : Signal périodique

Un signal $s(t)$ est périodique s'il se répète à l'identique dans le temps. Le plus petit intervalle de répétition est appelé période T . On peut alors écrire

$$s(t) = s(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Remarques :

- T est homogène à un temps et s'exprime en s.
- On a également $s(t + pT) = s(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}$.
- La fréquence f est le nombre de répétitions du signal par unité de temps. On a évidemment $f = \frac{1}{T}$. f est homogène à l'inverse d'un temps et s'exprime en Hz.
- Il s'agit évidemment d'une modélisation, un signal parfaitement périodique ($\forall t$) n'existe pas.

Définition : Valeur moyenne

La valeur moyenne, notée $\langle s(t) \rangle$ d'un signal périodique $s(t)$ est définie par

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

Remarques :

- $\langle s \rangle$ a la même dimension que s . Elle est parfois notée \bar{s} .
- $\langle s \rangle$ est indépendant de la valeur de la valeur de t_0 choisie. On prendra fréquemment $t_0 = 0$ ou $t_0 = -\frac{T}{2}$.
- L'opérateur « valeur moyenne » est linéaire : on aura, pour deux signaux périodiques quelconques s_1 et s_2 de même période

$$\langle \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \rangle = \lambda_1 \langle s_1 \rangle + \lambda_2 \langle s_2 \rangle \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mais} \quad \langle s_1 s_2 \rangle \neq \langle s_1 \rangle \langle s_2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle s^2 \rangle \neq \langle s \rangle^2$$

- Pour un signal impair, $\langle s \rangle = 0$.
- Pour un signal pair $\langle s \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt$
- Pour un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, $\langle s \rangle = 0$.
- Pour un signal sinusoïdal avec offset $s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi)$, $\langle s \rangle = S_0$.

Définition : Valeur efficace

La valeur efficace, notée S_{eff} d'un signal périodique $s(t)$ est définie par

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, on a

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_m^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

Loi : Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$



Remarques :

- Pour un signal sinusoïdal avec offset $s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi)$

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (S_0^2 + 2S_0S_m \cos(\omega t + \varphi) + S_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)) dt \implies S_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \frac{S_m^2}{2}$$

- En général, les grandeurs énergétiques associées à un signal s sont proportionnelles au signal au carré : par exemple $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ en mécanique ou $\mathcal{P} = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}$ pour la puissance dissipée par effet Joule en électrocinétique.

Si on note k le coefficient de proportionnalité ($\mathcal{P} = ks^2$), la puissance moyenne sera alors

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle ks^2 \rangle = k \langle s^2 \rangle = k S_{\text{eff}}^2$$

Le comportement énergétique moyen du système pour un signal périodique sera le même que pour un signal stationnaire de valeur S_{eff} .

- Par exemple, la tension du réseau électrique domestique est un signal sinusoïdal de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et de valeur efficace $S_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$: son amplitude est $S_m = \sqrt{2} \times 230 = 325 \text{ V}$.

I.2 - Décomposition en séries de Fourier

On admet la loi suivante

Loi : Décomposition d'un signal périodique

Tout signal périodique, de période T , fréquence f et pulsation ω peut s'écrire comme une combinaison linéaire (ie superposition) de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $c_n \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi_n \in]-\pi; \pi]$.

Remarques :

- S_0 est la valeur moyenne du signal : $S_0 = \langle s \rangle$.
- Le terme en $n = 1$ s'appelle le mode **fondamental**. Il a la même période/fréquence/pulsation que le signal.
- Pour $n > 1$, le terme de fréquence nf s'appelle **harmonique** de rang n (l'harmonique de rang 1 n'existe pas, le premier harmonique est celui de rang 2).
- c_n est l'amplitude et φ_n la phase à l'origine de l'harmonique de rang n (ou du fondamental pour $n = 1$).
- On retrouve les relations classiques pour tout signal sinusoïdal

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \quad \cos \varphi_n = \frac{a_n}{c_n} \quad \sin \varphi_n = -\frac{b_n}{c_n}$$

- On peut montrer

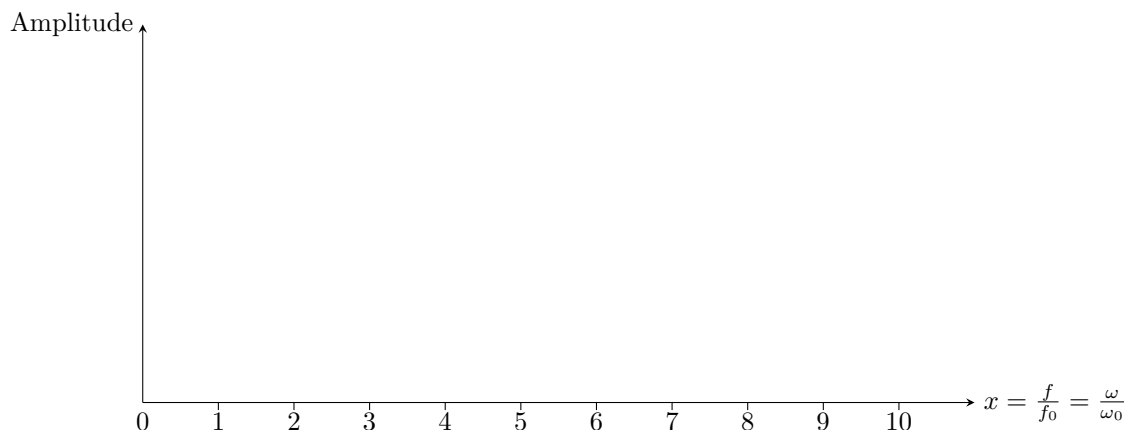
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$

- Si $s(t)$ est paire, alors $b_n = 0 \forall n$: la décomposition en série de Fourier ne contient que des cos.
- Si $s(t)$ est impaire, alors $a_n = 0 \forall n$: la décomposition en série de Fourier ne contient que des sin.

Définition : Spectre d'un signal

Le spectre d'amplitude d'un signal est la représentation sur un graphe en fréquence ou pulsation des amplitudes des harmoniques. Il s'agit donc d'un spectre discret (seules certaines fréquences sont présentes). Par exemple, pour un signal de fréquence f_0 (ou de pulsation ω_0)



Remarques :

- En général, les amplitudes c_n décroissent avec n .
- On peut également tracer le spectre des phases à l'origine φ_n . Il s'agit également d'un spectre discret.

Valeur efficace

La valeur efficace du signal est donnée par

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \right]^2 dt$$

Le développement du terme au carré mène des termes en

$$\cos(n\omega t + \varphi_n) \cos(m\omega t + \varphi_m)$$

Généralisation : transformée de Fourier

Cette décomposition en superposition de signaux sinusoïdaux peut se généraliser à tout signal $s(t)$ quelconque, non périodique. Toutes les pulsations peuvent être présentes, on passe alors en notation complexe et on peut écrire

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Toutes les fréquences pouvant être présentes dans le signal, on passe d'un spectre d'amplitude discret à un spectre continu (par exemple le spectre d'émission des sources lumineuses, cf chapitre OS-A).

I.3 - Principe du filtrage**Définition : Filtre**

Un filtre est un dispositif qui agit sur un signal en modifiant son spectre. Son rôle principal est d'extraire la partie utile d'un signal correspondant à un domaine de fréquence défini. Dans le cas d'un signal périodique, cela se traduit par une modification des harmoniques présentes : leur amplitude peut être augmentée ou diminuée et leur phase ajustée.

Un filtre linéaire a son fonctionnement décrit par une équation différentielle linéaire à coefficient constants

$$\sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k e(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^q b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} \quad (1.1)$$

où $e(t)$ est le signal en entrée et $s(t)$ le signal en sortie.

L'ordre du filtre est $\max(p, q)$ (avec en général $q \geq p$).

Filtrage linéaire d'un signal sinusoïdal

Pour un signal purement sinusoïdal de pulsation ω , on passe en formalisme complexe, avec les grandeurs complexes associées \underline{e} et \underline{s} et en appliquant la règle de dérivation en notation complexe : $\frac{d}{dt} \equiv j\omega$ et donc $\frac{d^k}{dt^k} \equiv (j\omega)^k$.

L'équation de fonctionnement du filtre 1.1 devient alors

$$\left(\sum_{k=0}^p a^k (j\omega)^k \right) \underline{e} = \left(\sum_{k=0}^q b^k (j\omega)^k \right) \underline{s}$$

que l'on peut réécrire sous forme de fraction rationnelle (*ie* rapport de deux polynômes) en ω :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\sum_{k=0}^p a^k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^q b^k (j\omega)^k} \quad (1.2)$$

Filtrage linéaire d'un signal périodique

Un signal périodique pouvant être exprimé sous la forme d'une superposition (*ie* combinaison linéaire) de signaux sinusoïdaux, et le filtre étant lui-même linéaire, on peut en déduire que le signal de sortie est la superposition des réponses du filtre à chaque harmonique du signal d'entrée.

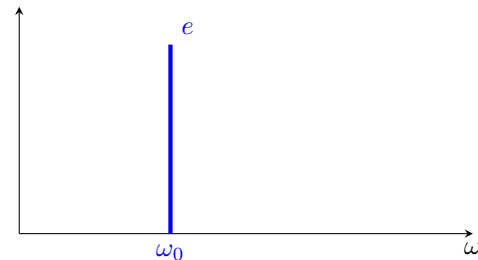
Le spectre de sortie est inclus dans le spectre d'entrée (il n'y a pas de nouvelles composantes qui n'étaient initialement pas présentes).

Filtrage non-linéaire

Dans le cas d'un filtre non-linéaire, la relation entre e et s n'est plus linéaire, on peut voir apparaître des nouvelles fréquences dans le signal de sortie qui n'étaient pas présentes dans le signal d'entrée

Exemple : filtre $s(t) = k e^2(t)$

Pour un signal sinusoïdal $e(t) = E_m \cos(\omega_0 t)$



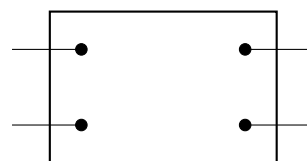
II - Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

Les dispositifs qui seront mis en œuvre dans un circuit électrique pour réaliser un filtre linéaire seront caractérisés par une grandeur en entrée (en général une tension v_e) et une grandeur en sortie (en général une tension v_s). Ils auront donc 4 bornes les reliant au reste du circuit.

II.1 - Quadripôle

Définition : Quadripôle

Un quadripôle est un élément de circuit relié au reste du circuit par 4 bornes : en général deux bornes sont reliées au(x) source(s) (elles sont alors appelées bornes d'entrée) et deux au(x) charge(s) (elles sont alors appelées bornes de sortie).



On note alors v_e et v_s les tensions d'entrée et de sortie et i_e et i_s les courants d'entrée et de sortie, le côté « entrée » est en général orienté en convention récepteur, le côté « sortie » en convention générateur.

Définition : Quadripôle linéaire

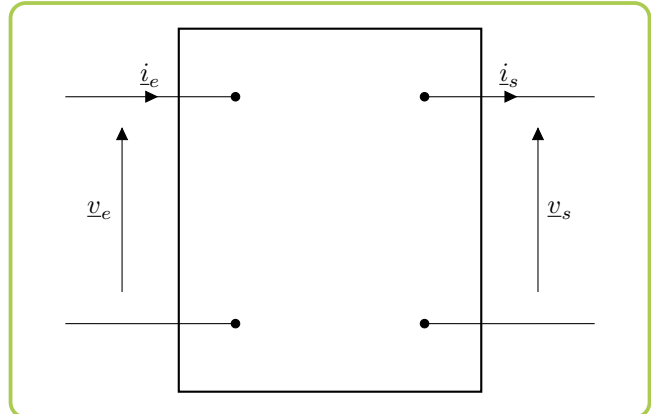
Un quadripôle linéaire est un quadripôle où les grandeurs d'entrée et de sortie sont reliées par une combinaison linéaire de leurs dérivées. Par exemple, en prenant v_e et v_s

$$\sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k v_e}{dt^k} = \sum_{k=0}^q b_k \frac{d^k v_s}{dt^k} \quad (1.3)$$

II.2 - Fonction de transfert

Pour mener l'étude d'un quadripôle linéaire en régime sinusoïdal forcé, on passe en notation complexe. Le quadripôle peut alors être caractérisé par ses impédances d'entrée \underline{Z}_e et de sortie \underline{Z}_s . Afin de relier la tension de sortie \underline{v}_s à la tension d'entrée \underline{v}_e , on complète cette modélisation par l'ajout d'une source de tension idéale :

La fonction de transfert \underline{H} du quadripôle est alors

**Définition : Fonction de transfert**

Remarques :

- En écrivant l'équation 1.3 de fonctionnement du quadripôle en notation complexe, on obtient une fraction rationnelle en $j\omega$:

$$\underline{H} = \frac{\sum_{k=0}^p a^k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^q b^k (j\omega)^k} \quad (1.4)$$

- La fonction de transfert est le rapport des tensions de sortie et d'entrée, circuit ouvert du côté de sortie. Si on branche une charge, on a alors $\underline{v}_s = \underline{H} \underline{v}_e + \underline{Z}_s \underline{i}_s$.
- La notion de la fonction de transfert \underline{H} peut se généraliser à n'importe quel rapport entre grandeur de sortie et grandeur d'entrée *en notation complexe*.

La fonction de transfert dépend évidemment de la pulsation ω et $\underline{H}(j\omega)$ étant une grandeur complexe, on peut interpréter séparément son module et son argument.

Gain linéaire

Le gain linéaire G est le rapport des amplitudes des signaux d'entrée et de sortie. On peut alors écrire, pour un filtre linéaire en notation complexe,

Définition : Gain linéaire

Déphasage

Le déphasage entre signal de sortie et signal d'entrée est donné par l'argument de \underline{H} :

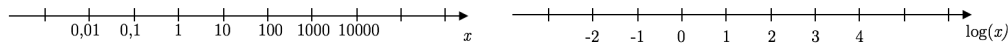
$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{v_s}{v_e}\right) = \arg\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = \varphi_s - \varphi_e$$

II.3 - Diagramme de Bode

Comme à la fois G et ω peuvent varier énormément, et couvrir plusieurs ordres de grandeur, nous allons utiliser une échelle logarithmique pour représenter la fonction de transfert \underline{H} . Au lieu de progresser linéairement, elle augmente par facteurs multiplicatifs ($\times 10$, $\times 100$...). Cela permet :

- de visualiser sur un même graphique des valeurs très petites et très grandes ;
- de mettre en évidence des tendances ou des lois de type puissance ;
- de simplifier la lecture lorsque les variations sont exponentielles ou s'étendent sur de nombreux ordres de grandeur.

Échelle logarithmique : on représente $\log(x)$ à la place de x :



Définition : Gain en décibels



Remarques :

- si $G(\omega_2) = 10G(\omega_1)$ alors $G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_1) + 20 \text{ dB}$;
- si $G(\omega_2) = \frac{1}{10}G(\omega_1)$ alors $G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_1) - 20 \text{ dB}$;
- si $G(\omega_2) = 2G(\omega_1)$ alors $G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_1) + 20 \log 2 \approx G_{dB}(\omega_1) + 6 \text{ dB}$ ($\log 2 \approx 0,301$) ;
- si $G(\omega_2) = \frac{1}{2}G(\omega_1)$ alors $G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_1) - 6 \text{ dB}$;
- si $G(\omega_2) = \sqrt{2}G(\omega_1)$ alors $G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_1) + 10 \log 2 \approx G_{dB}(\omega_1) + 3 \text{ dB}$;
- si $G(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}G(\omega_1)$ alors $G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_1) - 3 \text{ dB}$.

□ Si on s'intéresse au rapport des puissances moyennes en entrée et en sortie, on a en général

$$\mathcal{P}_e = \langle kv_e^2 \rangle = k \langle v_e^2 \rangle = kV_{e,\text{eff}}^2$$

et de façon identique $\mathcal{P}_s = kV_{s,\text{eff}}^2$.

Le gain linéaire en puissance est alors $\frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e} = \frac{V_{s,\text{eff}}^2}{V_{e,\text{eff}}^2}$ et en décibels

$$20 \log \left(\frac{V_{s,\text{eff}}}{V_{e,\text{eff}}} \right) = 10 \log \left(\frac{V_{s,\text{eff}}^2}{V_{e,\text{eff}}^2} \right) = 10 \log \left(\frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e} \right)$$

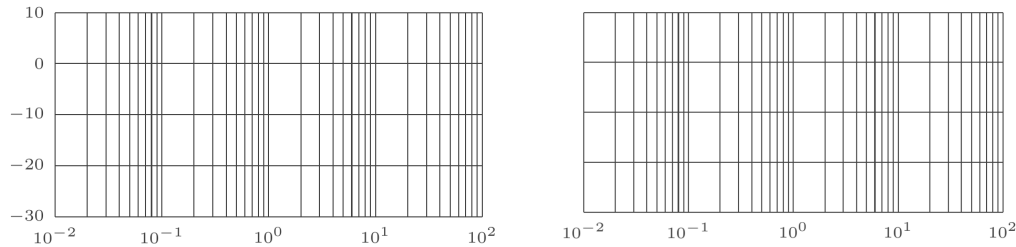
- La bande-passante à -3 dB permet donc de définir l'intervalle de fréquences où
- l'amplitude est divisée par un facteur $\sqrt{2}/2$,
 - la puissance est divisée par 2.

Définition : Diagramme de Bode

Représentation de G_{dB} et φ en fonction de ω (ou f ou x) avec une échelle logarithmique en abscisse.

Un diagramme de Bode complet est donc un ensemble de deux graphes :

- Diagramme de Bode en gain : on représente le gain en décibel en fonction de la pulsation (ou de la pulsation réduite) en échelle logarithmique en abscisse $G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega))$
- Diagramme de Bode en phase : on représente la phase en fonction de la pulsation (ou de la pulsation réduite) en échelle logarithmique en abscisse : $\varphi(\omega)$



Pente du diagramme en gain :

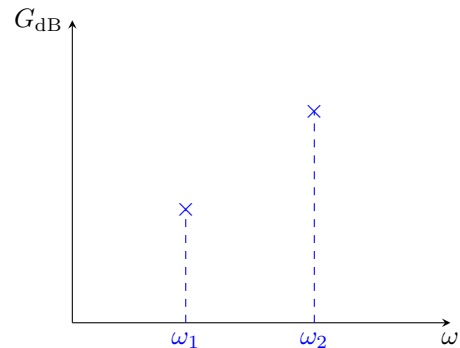
Si on considère deux pulsations ω_1 et ω_2 , la pente du diagramme de Bode en gain entre ces deux points est donnée par

$$\text{pente} = \frac{G_{dB}(\omega_2) - G_{dB}(\omega_1)}{\log(\omega_2) - \log(\omega_1)}$$

En prenant une **décade** $\omega_2 = 10\omega_1$,

$$\log(\omega_2) - \log(\omega_1) = \log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 10$$

La pente s'exprimera en dB/décade (en général multiple de 20).



II.4 - Types de filtres

Pour un signal $e(t)$ quelconque, périodique de période T , de pulsation ω , la décomposition en série de Fourier permet d'écrire :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

soit en représentation complexe

$$\underline{e}(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n e^{j(n\omega t + \varphi_n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{e}_n$$

Le filtre étant linéaire, le signal en sortie du filtre sera la superposition des réponses de chaque harmonique de pulsation $n\omega$:

$$\underline{s}_n = \underline{H}(jn\omega) \underline{e}_n \quad \text{avec} \quad \underline{H}(jn\omega) = G(n\omega) e^{j\varphi(n\omega)}$$

Le signal réel en sortie sera alors donné par

$$s_n(t) = \text{Re}(\underline{s}_n(t)) = G(0)E_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} G(n\omega)E_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega))$$

L'allure du diagramme de Bode en gain permet d'identifier, pour un filtre donné, les pulsations (ou fréquences) transmises et celles qui sont atténuées. Pour décrire qualitativement ce comportement, on caractérise un filtre par son **ordre** et sa **nature**.

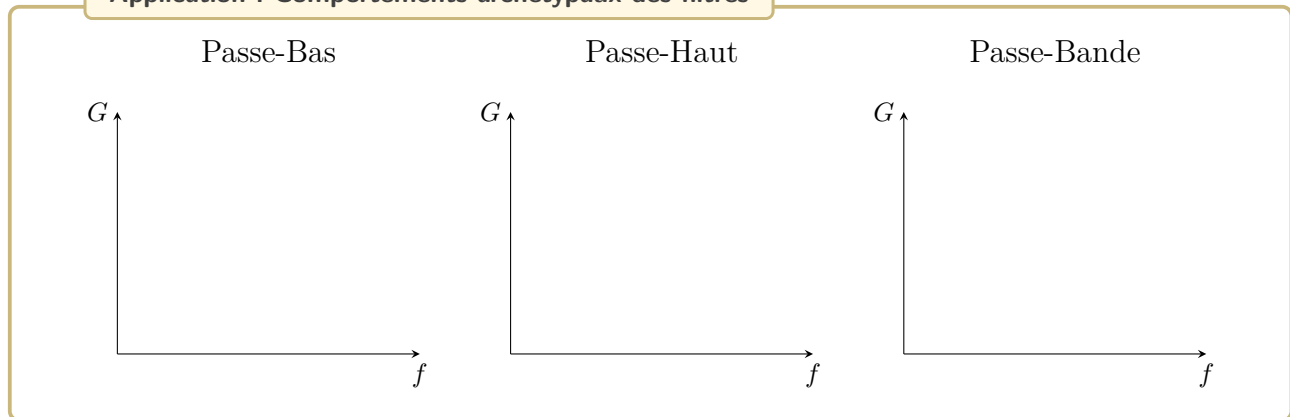
Ordre du filtre

L'ordre du filtre est le degré maximal de la dérivée qui intervient dans l'équation reliant l'entrée et la sortie (cf équation 1.1). Il s'agit donc également de l'exposant du terme en ω le plus élevé intervenant dans la fraction rationnelle définissant la fonction de transfert (cf équation 1.4). La quasi-totalité des filtres utilisés sont d'ordre 1 ou 2.

Nature du filtre

La nature d'un filtre indique qualitativement quelles plages de fréquences sont transmises. On distingue généralement trois comportements types : passe-bas, passe-haut et passe-bande.

Application : Comportements archétypaux des filtres



La fréquence limite entre le domaine où le signal est transmis et celui où il est atténué est appelée fréquence de coupure.

Il ne s'agit toutefois que de modèles idéalisés : dans la réalité, un filtre ne peut pas couper totalement les fréquences indésirables d'un seul coup. La transition entre les fréquences transmises et atténuées est toujours progressive.

IV - Filtrage classiques d'ordre 2

De façon générale, la fonction de transfert d'un filtre d'ordre 2 peut se mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N_0 + N_1(j\omega) + N_2(j\omega)^2}{D_0 + D_1(j\omega) + D_2(j\omega)^2} \quad \text{avec } D_2 \neq 0 \quad (1.5)$$

Filtrage classiques d'ordre 2

On peut déterminer les comportements asymptotiques :

De la même façon que les filtres d'ordre 1 sont basés sur des circuits d'ordre 1, les filtres d'ordre 2 seront basés sur des circuits d'ordre 2. On retrouvera les notations et phénomènes vus dans les chapitres précédents (OS-K et OS-L) :

- forme canonique des équations différentielles et en notation complexe,
- apparition de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q ,
- phénomène de résonance (uniquement si $Q > 1/\sqrt{2}$ pour la résonance en tension).

IV.1 - Passe-haut d'ordre 2

Fonction de transfert de la forme :

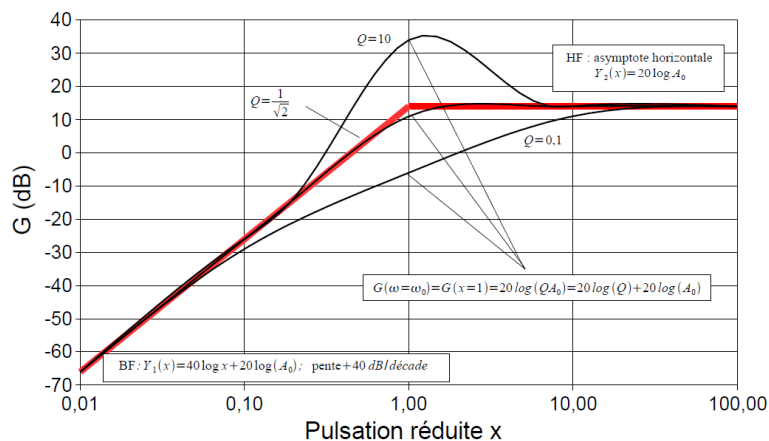
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 \frac{-\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{A_0 (-x^2)}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Diagramme asymptotique

En B.F. ($x \ll 1$) :

En H.F. ($x \gg 1$) :

Le diagramme de Bode en gain en fonction de la pulsation réduite x est tracé ci-dessous pour $A_0 = 1$ et pour différentes valeurs de Q .



On retient que :

- L'asymptote à basse fréquence de la courbe du gain a pour pente +40 dB/décade.
- L'asymptote à haute fréquence de la courbe du gain est une droite horizontale.
- Les asymptotes se croisent en $x = 1$ (soit $\omega = \omega_0$ ou $f = f_0$).
- Si le filtre ne présente pas de résonance ($Q < 1/\sqrt{2}$), le diagramme de Bode réel reste toujours en dessous du diagramme asymptotique.
- Le diagramme de Bode réel se rapproche le plus du diagramme asymptotique lorsque le filtre est à la limite de la résonance ($Q = 1/\sqrt{2}$).

IV.2 - Passe-bas d'ordre 2

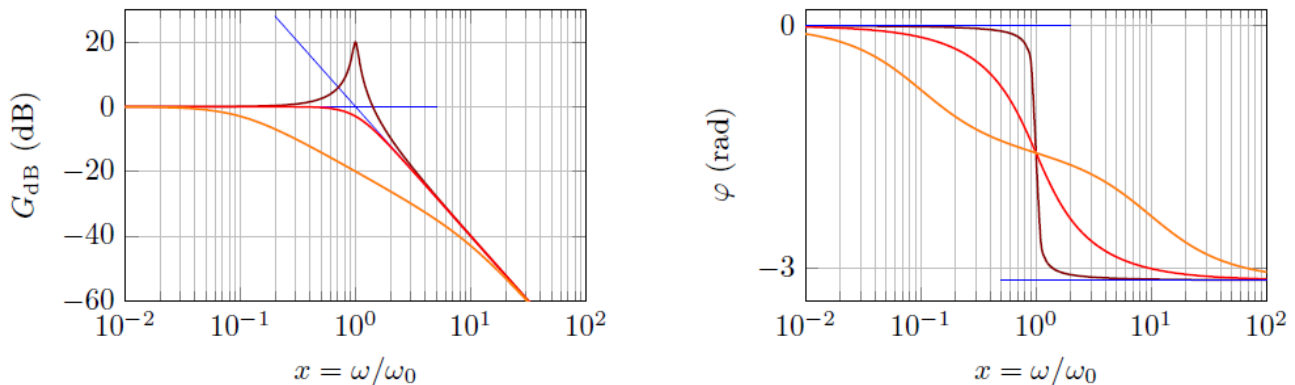
Fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{A_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

L'asymptote à basse fréquence de la courbe du gain est une droite horizontale.

L'asymptote à haute fréquence de la courbe du gain a pour pente -40 dB/décade.

Le diagramme de Bode en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ est tracé ci-dessous pour $A_0 = 1$ et pour $Q = 10$ (courbe marron, avec résonance), $Q = 1/\sqrt{2}$ (courbe rouge, au plus proche des asymptotes) et $Q = 1/10$ (courbe orange, sans résonance et éloignée des asymptotes).



IV.3 - Passe-bande d'ordre 2

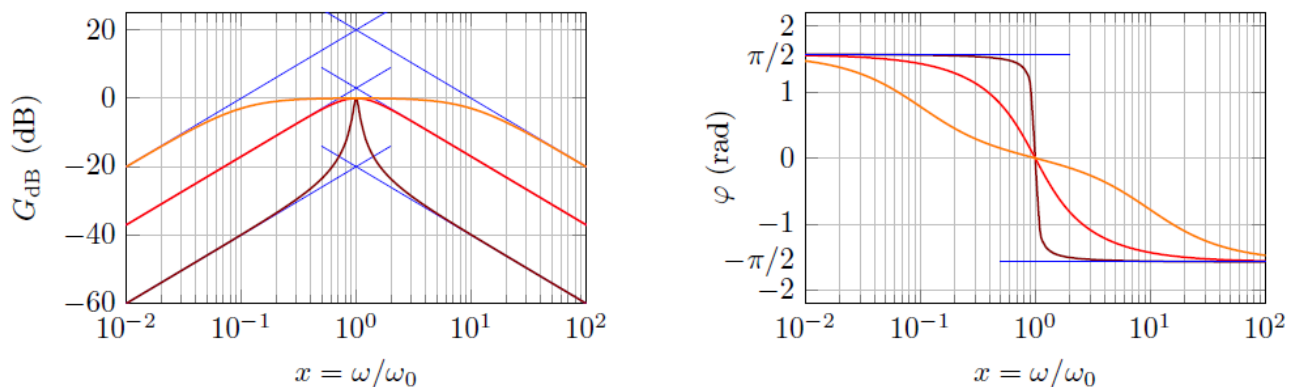
Fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{A_0 \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \quad \text{ou} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

L'asymptote à basse fréquence de la courbe du gain a pour pente +20 dB/décade.

L'asymptote à haute fréquence de la courbe du gain a pour pente -20 dB/décade.

Le diagramme de Bode en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ est tracé ci-dessous pour $A_0 = 1$ et pour $Q = 10$ (courbe marron, avec résonance), $Q = 1/\sqrt{2}$ (courbe rouge, au plus proche des asymptotes) et $Q = 1/10$ (courbe orange, sans résonance et éloignée des asymptotes).



V - Choix d'un filtre

La question centrale est désormais : comment choisir un filtre adapté à un besoin donné ? L'objectif est en effet de préserver (ou éventuellement amplifier) la partie utile d'un signal, tout en atténuant les composantes indésirables.

Ce choix dépend de plusieurs éléments : la nature du signal d'entrée, les caractéristiques du signal utile, ainsi que le type de perturbations à éliminer (bruits basse ou haute fréquence, parasites impulsionnels, etc.).

La première étape consiste donc à identifier clairement les critères que le filtre devra respecter.

V.1 - Cahier des charges

Le cahier des charges permet de définir précisément les caractéristiques que doit vérifier le filtre. On y trouve notamment :

- ☐ bande-passante (fréquences à conserver) :
 - gain nominal souhaité
 - éventuellement tolérance par rapport à ce gain nominal ou encore gain minimal et maximal acceptables
- ☐ bandes atténuées (fréquences à éliminer) :
 - atténuation minimale (ou gain maximal) exigée
 - éventuellement tolérance par rapport à cette atténuation minimale
 - éventuellement pente minimale du gain

V.2 - Gabarit d'un filtre

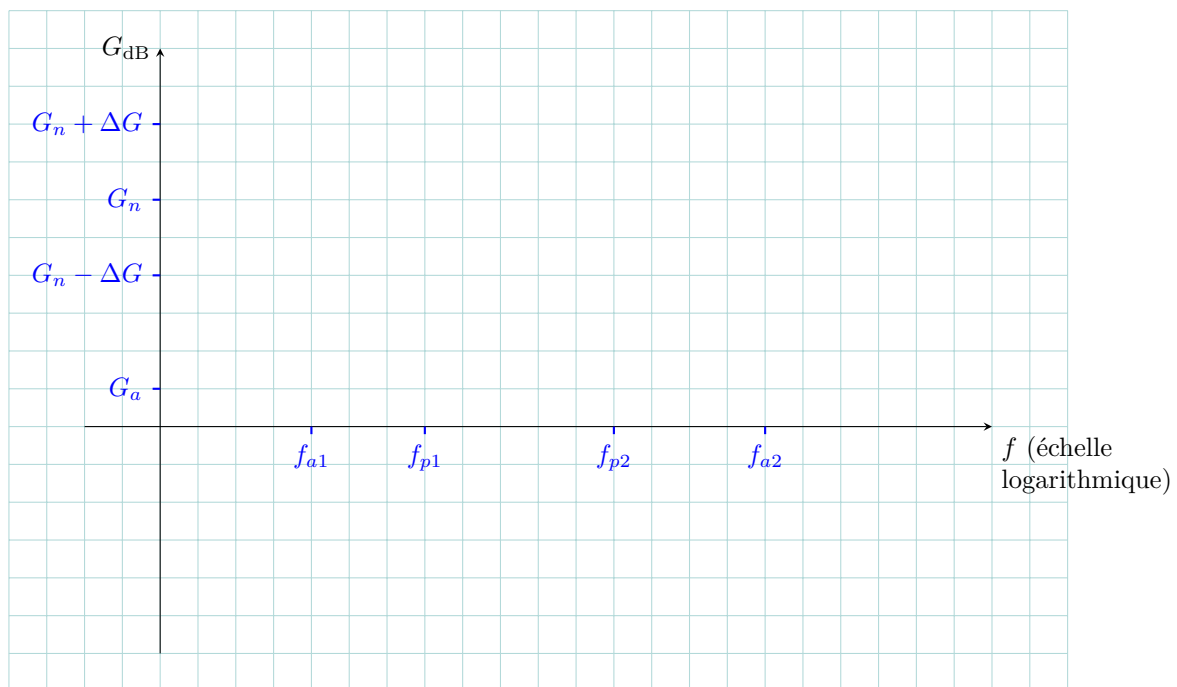
Le gabarit est la traduction graphique du cahier des charges dans le diagramme de Bode en gain. Il met en évidence les zones « interdites » et on y identifiera des points critiques que le filtre devra impérativement respecter.

Application : Gabarit d'un filtre passe-bande

Cahier des charges :

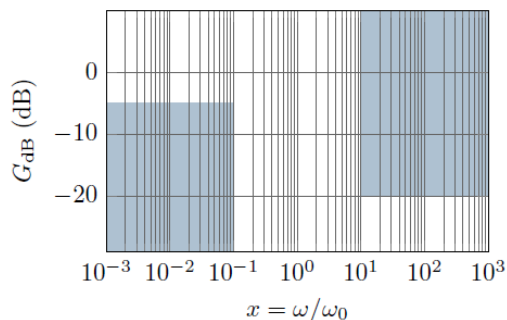
- bande passante définie par $[f_{p1} ; f_{p2}]$
- bandes atténuées : $[0 ; f_{a1}]$ et $[f_{a2} ; +\infty]$ (avec $f_{a1} < f_{p1} < f_{p2} < f_{a2}$)
- gain nominal dans la bande passante G_n avec une tolérance $\pm\Delta G$
- gain maximal dans la bande amortie G_a

Gabarit associé :

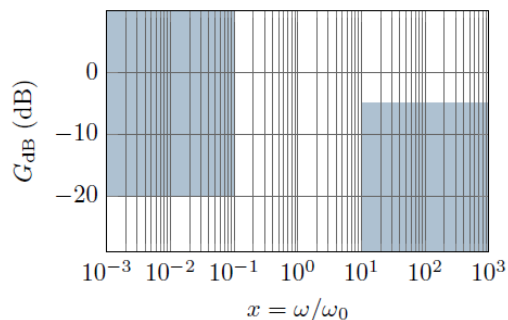


Identification des points critiques

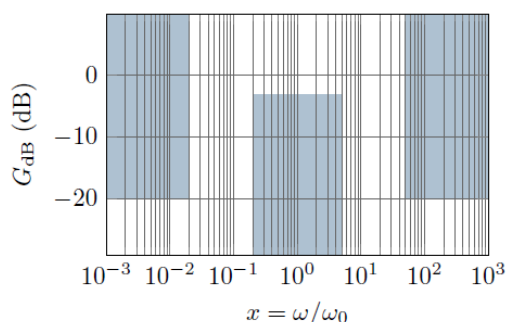
Gabarit des filtres de référence



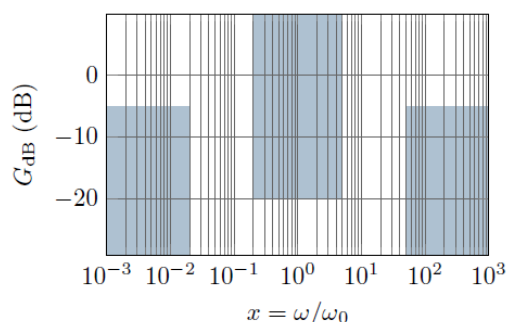
(a) Filtre passe-bas



(b) Filtre passe-haut



(c) Filtre passe-bande



(d) Filtre coupe-bande ou filtre réjecteur

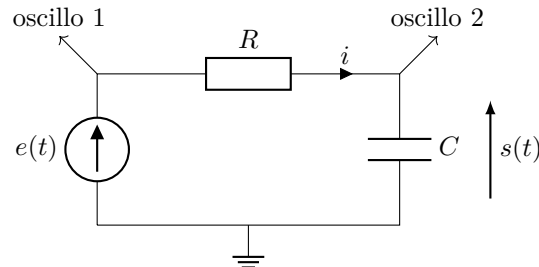
V.3 - Choix du filtre

On peut maintenant sélectionner un filtre approprié (ordre, nature, fréquence(s) de coupure,...) en vérifiant qu'il respecte l'ensemble des critères définis au niveau du cahier des charges, et en s'appuyant pour cela sur le gabarit et en particulier sur les points critiques identifiés à l'étape précédente.

VI - Filtrage d'un signal crêteau

VI.1 - Filtre passe-bas d'ordre 1

Expérience Filtre RC avec $R = 1\text{ k}\Omega$ et $C = 160\text{ nF}$, ce qui assure $f_c = 1\text{ kHz}$.

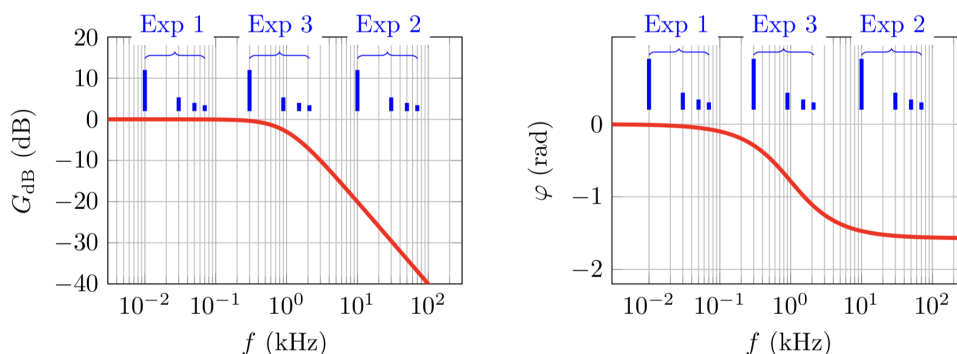


On réalise l'expérience pour 3 fréquences différentes : $f_1 = 10\text{ Hz}$, $f_2 = 10\text{ kHz}$ et $f_c = 300\text{ Hz}$.

Observations

- Exp. 1 : on retrouve en sortie le même signal que l'entrée.
- Exp. 2 : on obtient un signal triangle de même fréquence que le crêteau, mais très atténué en amplitude.
- Exp. 3 : on obtient un signal « en dents de requin », peu indentifiable, de même fréquence que le signal crêteau.

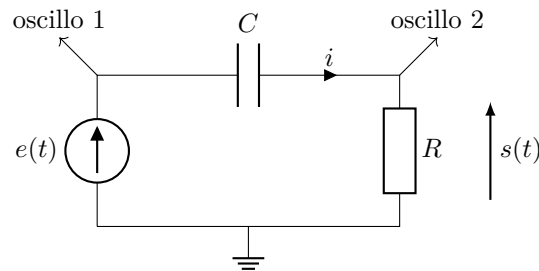
Interprétation On superpose le diagramme de Bode du filtre et le spectre du signal d'entrée :



- Exp. 1 : toutes les composantes du signal d'entrée sont conservées en terme d'amplitude et ne sont pas déphasées : on verra donc un signal très ressemblant au signal crêteau d'entrée en sortie.
- Exp. 2 : toutes les composantes sont fortement atténuées et déphasées de $\pi/2$. On voit donc un signal faible en amplitude et qui semble « décalé ». On peut aussi expliquer la forme triangulaire du signal : en effet, une asymptote de -20 dB/déc correspond dans le domaine complexe à multiplier par $j\omega$, c'est-à-dire à intégrer.
- Exp. 3 : les premières composantes sont peu atténuées, mais le déphasage change grandement pour chaque composante. On obtient donc un signal peu caractéristique, mais de même fréquence puisque les basses fréquences sont globalement conservées.

VI.2 - Filtre passe-haut d'ordre 1

Expérience Filtre CR avec $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 160 \text{ nF}$, ce qui assure $f_c = 1 \text{ kHz}$.

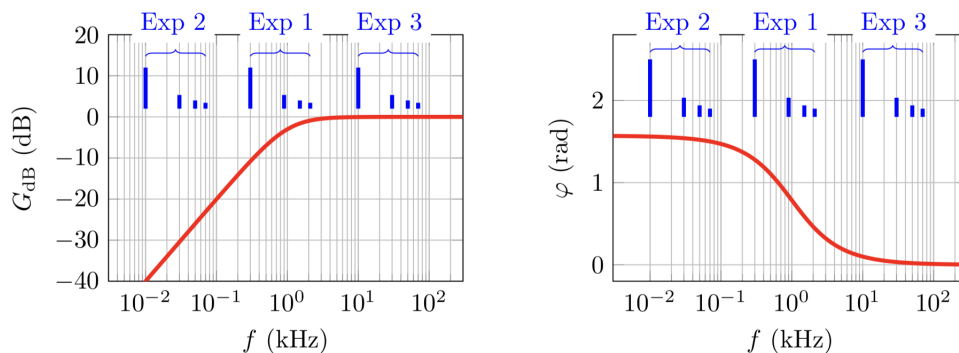


On réalise l'expérience pour 3 fréquences différentes : $f_1 = 300 \text{ Hz}$, $f_2 = 10 \text{ Hz}$ et $f_c = 10 \text{ kHz}$.

Observations

- Exp. 1 : on obtient un signal « en dents de requin », peu identifiable, de même fréquence que le signal créneau. on retrouve en sortie le même signal que l'entrée.
- Exp. 2 : on obtient un signal presque nul, sauf au niveau des fronts montants et descendants du signal carré.
- Exp. 3 : on obtient un signal proche de l'entrée, mais sans l'offset.

Interprétation On superpose le diagramme de Bode du filtre et le spectre du signal d'entrée :

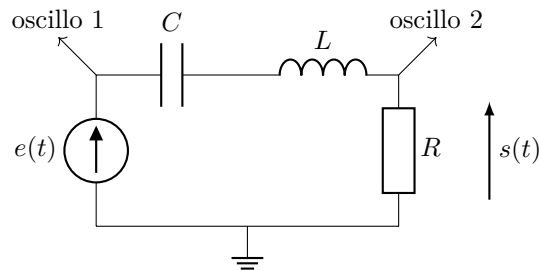


- Exp. 1 : certaines composantes sont conservées, d'autres atténuées, toutes ont un déphasage différent. On obtient donc un signal peu caractéristique.
- Exp. 2 : toutes les composantes sont très atténuées et déphasées de $\pi/2$. ce qui entraîne en sortie un signal nul. On peut aussi expliquer la présence des pics : en effet, une asymptote de $+20 \text{ dB/déc}$ correspond dans le domaine complexe à diviser par $j\omega$, c'est-à-dire à dériver.
- Exp. 3 : toutes les composantes sont conservées et peu voire pas déphasées : le signal de sortie est semblable à celui de l'entrée. Seule l'offset, de fréquence nulle est "coupée" par le filtre.

VI.3 - Filtre passe-bande d'ordre 2

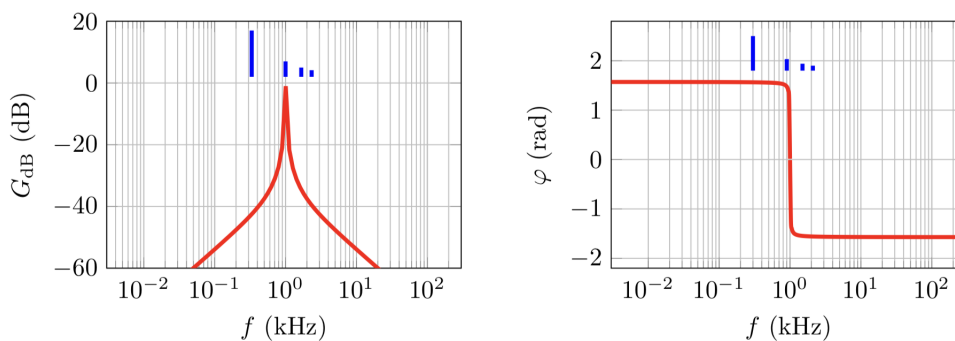
Expérience On réalise le passe-bande d'ordre 2 le plus simple : un filtre RLC.

On prendra $R = 50\ \Omega$, $L = 800\ \text{mH}$ et $C = 32\ \text{nF}$, ce qui impose $f_0 = 1\ \text{kHz}$ et $Q = 50$. On réalise l'expérience pour $f = 330\ \text{Hz}$.



Observations : on obtient un signal sinusoïdal de fréquence 1kHz, d'amplitude plus faible que celle du créneau.

Interprétation On superpose le diagramme de Bode du filtre et le spectre du signal d'entrée :



Seule la composante à 1kHz est conservée : on obtient donc un signal sinusoïdal.