Correction OS – TD 2

Approximation de Gauss et lentilles minces

Méthodes, compétences et savoirs-faire

3 - Tracé de rayon

Cf. cours. Il faut utiliser **un** rayon auxiliaire et les propriétés des plans focaux. On peut utiliser un rayon auxiliaire et une propriété du plan focal objet ou un rayon auxiliaire et une propriété du plan focal image mais, en toute rigueur, un seul rayon auxiliaire est suffisant pour répondre à la question.

4 - Lentille biconcave

Une lentille biconcave est à bords épais donc divergente donc sa focale est négative : $f' = -12\,\text{cm}$. On pose les notations : soit A un point de l'objet situé sur l'axe optique de la lentille, on a : $A \xrightarrow{\text{lentille}} A'$.
On prend ensuite bien soin de mener le calcul littéral jusqu'à obtenir une expression la plus simple possible avec, dans le premier membre, la réponse à la question et, dans le deuxième membre, des données de l'énoncé.

1. $\boxed{\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OA}f'}{\overline{OA}+f'}} = \frac{-20\times-12}{-20-12} = -7{,}5\,\text{cm}$. L'image est virtuelle.
2. $\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{f'}{f'+\overline{OA}}} = \frac{-12}{-12-20} = -\frac{3}{8} = 0,38$. L'image est droite et plus petite.

I - Lentille convergente

Soit A un point de la tour situé sur l'axe optique de la lentille, on a : $A \xrightarrow{\text{lentille}} A'$. On obtient $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA}+f'}$ et $\gamma = \frac{f'}{f'+\overline{OA}}$.
Une tour est évidemment un objet réel, donc $\overline{OA} = -D = -3\,\text{km}$. La taille de la tour est donnée indirectement par l'angle α sous lequel elle est vue ; si on considère une taille transversale positive et un angle positif, on a $\tan(\alpha) = -\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$. L'angle étant très faible (on est sans doute dans les conditions de Gauss), on peut écrire : $\alpha \approx -\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$ et $\overline{AB} = -\alpha\,\overline{OA}$ *avec α en radians.*

1. Il faut remarquer que $|\overline{OA}| \gg f'$. Cela mène à :
   — L'objet peut être considéré comme étant « optiquement » à l'infini ; d'où $A' \equiv F'$ et $\boxed{\overline{OA'} = f'}$.
   — $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\overline{AB} = -f'\,\tan(\alpha)$ d'où $\boxed{\overline{A'B'} \approx -f'\,\alpha}$ *avec α en radians.*

   On trouve, numériquement :
   — $\overline{OA'} = 1{,}0\,\text{m}$.
   — $\overline{A'B'} = -0{,}010\,\text{m}$.
2. Étant donné $\overline{A'B'} \approx -f'\,\alpha$, on peut choisir une focale plus grande pour obtenir une image plus grande. On peut aussi se rapprocher de la tour pour qu'elle soit observée sous un plus grand angle.

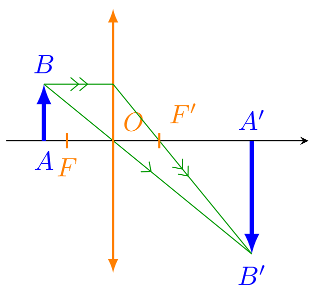
Le calcul sans approximation, bien que plus compliqué, mène aux mêmes résultats.

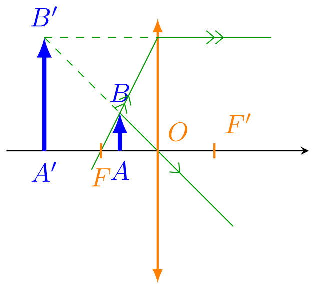
II - Position et nature d'une lentille

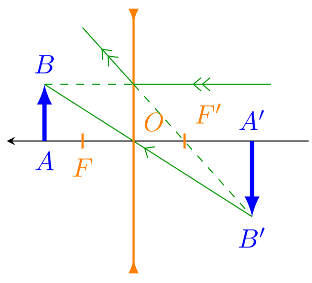
On utilise les propriétés des rayons lumineux issus de B, qui concourent donc en B', passant par le centre et les foyers des lentilles :

— la droite (BB') correspond au rayon lumineux qui n'est pas dévié, son intersection avec l'axe optique coïncide donc avec le centre O de la lentille, ce qui permet de placer cette dernière ;

— le rayon lumineux passant par B et parallèle à l'axe optique ressort de la lentille en passant par B'. Son intersection avec l'axe optique coïncide avec le foyer principal image F' ;
— on peut ensuite placer le foyer principal objet F par symétrie de F' par rapport à O (ou en traçant le rayon incident issu de B correspondant à un rayon émergent passant par B' et parallèle à l'axe optique).







Les positions relatives de F et F' par rapport au sens initial de la lumière permettent de déterminer la nature des lentilles : convergente pour les deux schémas de gauche, divergente pour celui de droite.

Remarque : sur le schéma de droite, l'axe optique est inversé par rapport au sens « classique » : on a bien affaire à une lentille divergente, les objet AB et image $A'B'$ étant alors virtuels.

III - Caractéristiques d'une lentille

1. D'après l'énoncé, on a $\overline{OA} = -70\,\text{cm}$ et $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{1}{2}$.

   — La formule du grandissement avec origine au centre permet de positionner l'image : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. On en déduit

   $$\overline{OA'} = -\frac{1}{2}\overline{OA} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{OA'} = 35\,\text{cm}}$$

   — On peut alors en déduire la focale f' de la lentille en utilisant la formule de position avec origine au centre :

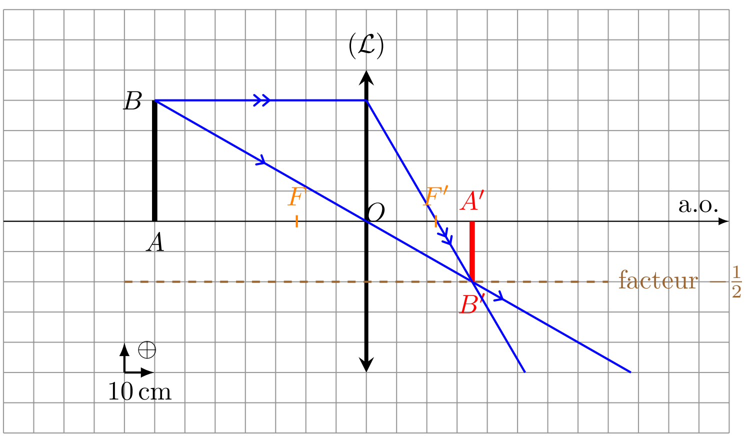
   $$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

   soit

   $$\frac{1}{f'} = \frac{1}{35\,\text{cm}} - \frac{1}{-70\,\text{cm}} = \frac{3}{70}\text{cm}^{-1} \quad \text{et donc} \quad \boxed{f' = \frac{70}{3} = 23\,\text{cm}}$$

   Comme $f' > 0$, on en déduit que <u>la lentille est convergente</u>

2. On commence par placer la lentille et l'objet (le point B étant placé à une hauteur arbitraire). On trace le rayon passant par B et O : ce dernier n'étant pas dévié, le point B' est situé dans son prolongement au niveau où sa hauteur par rapport à l'axe optique est réduit d'un facteur 2. On peut ensuite tracer le rayon incident parallèle à l'axe optique passant par B : le rayon émergent passe alors par B' et son intersection avec l'axe optique coïncide avec F'. On place ensuite F par symétrie. F est située après O sur l'axe optique : <u>la lentille est convergente</u>.



on lit
$\overline{OA'} \approx 35\,\text{cm}$
$f' = \overline{OF'} \approx 23\,\text{cm}$

IV - Doublet accolé

1. Fait en cours.
2. On applique la formule : $f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1+f'_2} = \frac{-6\,\text{cm}\times 8\,\text{cm}}{-6\,\text{cm}+8\,\text{cm}} = \frac{-48\,\text{cm}^2}{2\,\text{cm}}$ ce qui donne

$$\boxed{f' = -24\,\text{cm}} < 0. \quad \underline{\text{Le doublet est divergent}}.$$

.

3. (a)

$$A \xrightarrow{(L)} A'' \text{ donc } \boxed{\overline{OA''} = \frac{\overline{OA}\,f'}{\overline{OA}+f'}} \text{ et } \overline{OA''} = -7{,}5(4)\,\text{cm}$$

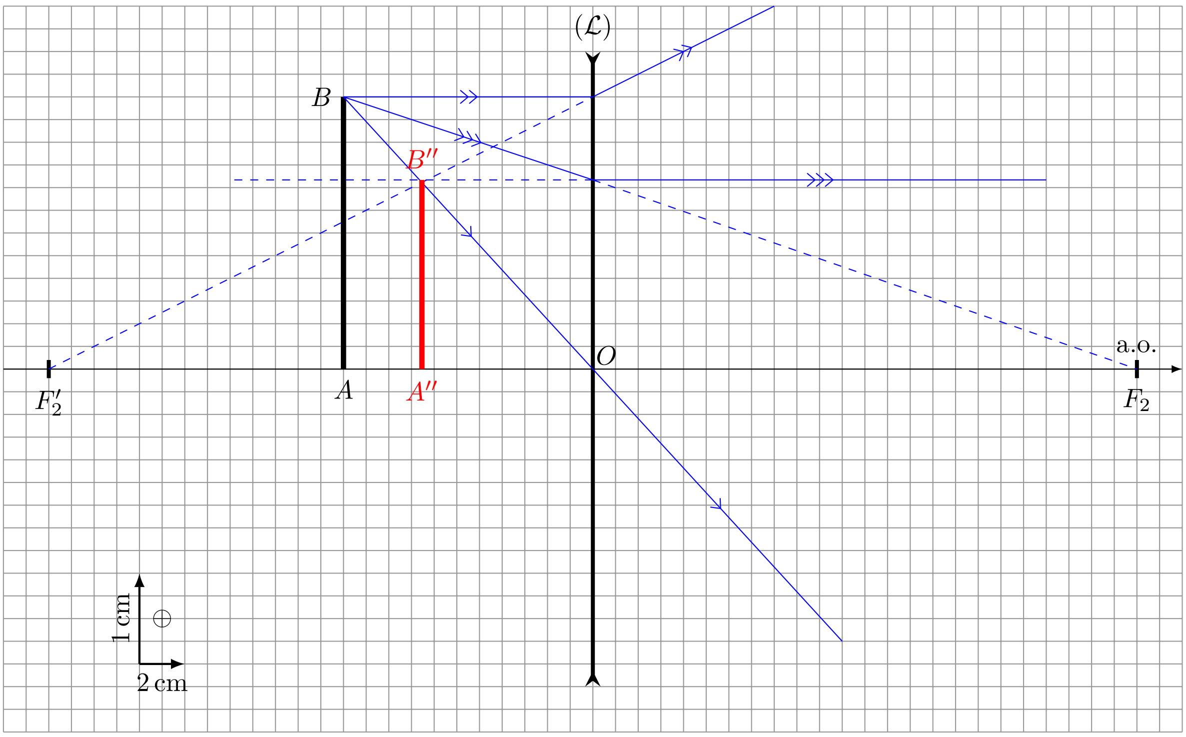
(b)

$$A \xrightarrow{(L_1)} A' \text{ donc } \boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}\,f'_1}{\overline{OA}+f'_1}} \text{ et } \overline{OA'} = -3{,}88\,\text{cm} \approx -3{,}9\,\text{cm}$$

$$A' \xrightarrow{(L_2)} A'' \text{ donc } \boxed{\overline{OA''} = \frac{\overline{OA'}\,f'_2}{\overline{OA'}+f'_2}} \text{ et } \overline{OA''} = -7{,}5(4)\,\text{cm}$$

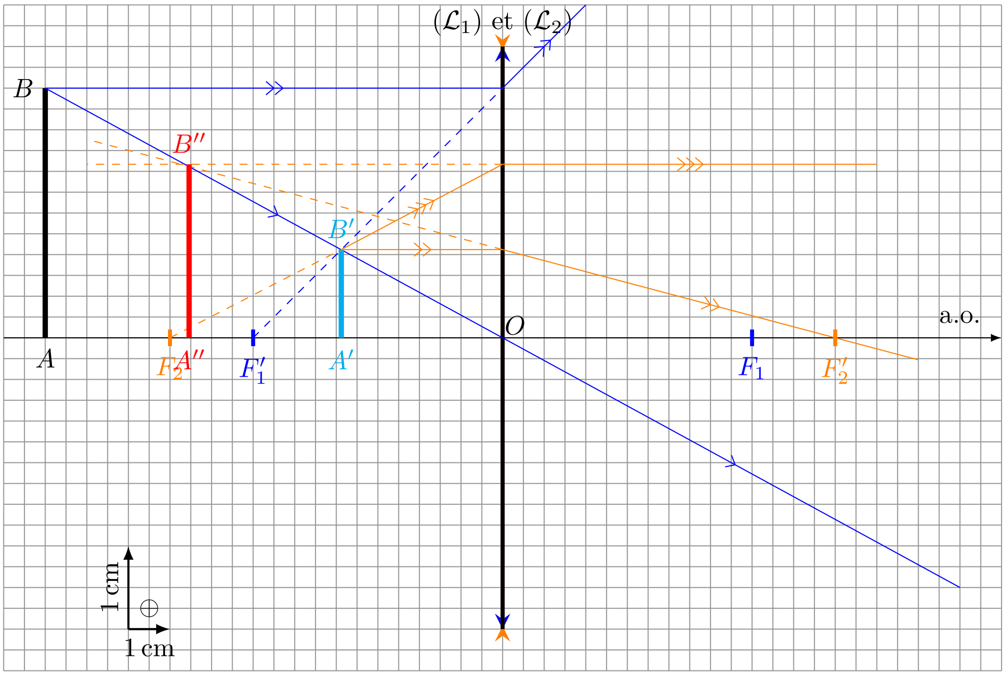
4. On commence par construire l'image $A''B''$ de AB à travers la lentille équivalente : $AB \xrightarrow{(L)\equiv(L_1+L_2)} A''B''$.
Pour cela, on construit soigneusement le schéma en indiquant notamment :
   — l'axe optique *orienté* ;
   — l'échelle, que l'on choisit adaptée pour que la construction soit claire et lisible (on peut en particulier choisir une échelle différente le long de l'axe optique et perpendiculairement à celui-ci) ;
   — le sens positif des décomptes des longueurs algébriques dans les deux directions ;
   — la position de la lentille et des points particuliers (O, F et F').
   — une marque sur chaque rayon lumineux permettant de clairement les différencier ;
   — les rayons virtuels et auxiliaires en pointillés.

   On trace 3 rayons, bien que 2 suffisent :
   — le rayon (1), avec une flèche, passant par B et O n'est pas dévié ;
   — le rayon (2), parallèle à l'axe optique et assant par B ressort en passant par F'_2 ;
   — le rayon (3), passant par B et F_2 ressort parallèle à l'axe optique.



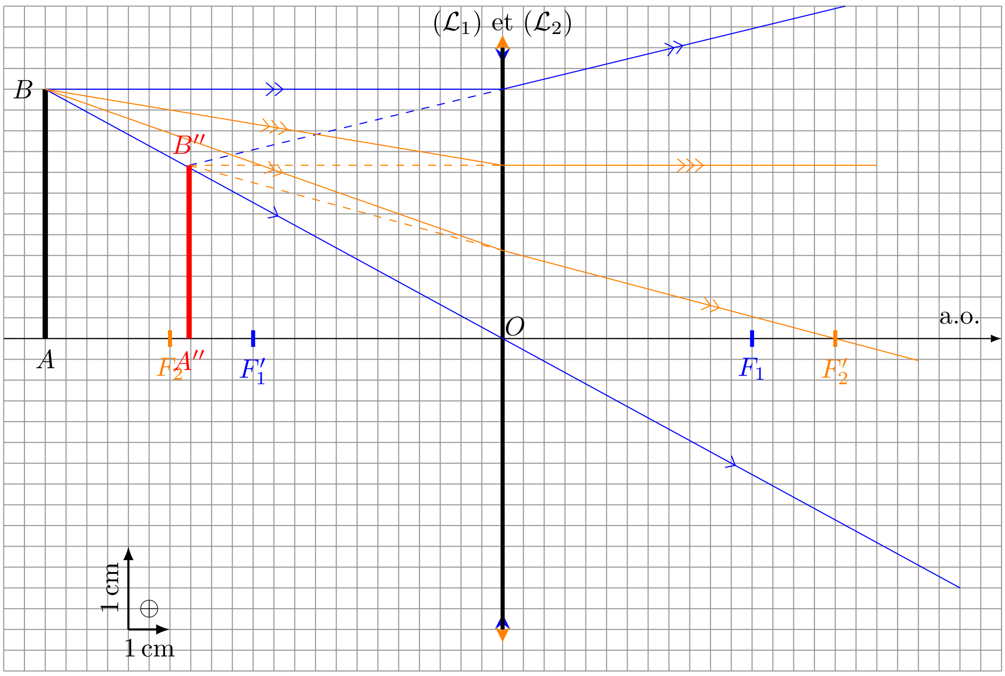
On lit directement sur le graphique, en tenant compte de l'échelle et du sens positif des grandeurs algébriques $\overline{OA''} = -7{,}6\,\text{cm}$ et $\overline{A''B''} = 2{,}1\,\text{cm}$

On reprend le schéma en passant cette fois-ci par l'image intermédiaire : $AB \xrightarrow{(L_1)} A'B' \xrightarrow{(L_1)} A''B''$.
Pour faciliter la lecture, on trace en bleu les rayons permettant de construire $A'B'$ à partir de AB et en orange les rayons permettant de construire $A''B''$ à partir de $A'B'$.



On lit alors sur le graphique $\overline{OA''} = -7{,}6\,\text{cm}$ et $\overline{A''B''} = 2{,}1\,\text{cm}$

Il faut cependant noter que les rayon bleus, permettant de construire l'image intermédiaire, ne traversent pas réellement la lentille, puisqu'ils sont ensuite deviée par (L_2). Les rayons bleus à droite de la lentille sont virtuels et ne correspondent pas au vrai chemin suivi par la lumière. De même, les rayons orange, permettant de construire l'image finale, n'ont pas d'antécédent réel avant la lentille puisqu'ils doivent traverser (L_1) auparavant. Pour construire les rayons émergeants correspondant aux rayons incidents bleus, il faut utiliser le fait qu'ils passent tous par B'' et les rayons incidents correspondant au rayons émergeant orange proviennent tous de B. Un schéma final pourrait alors être :



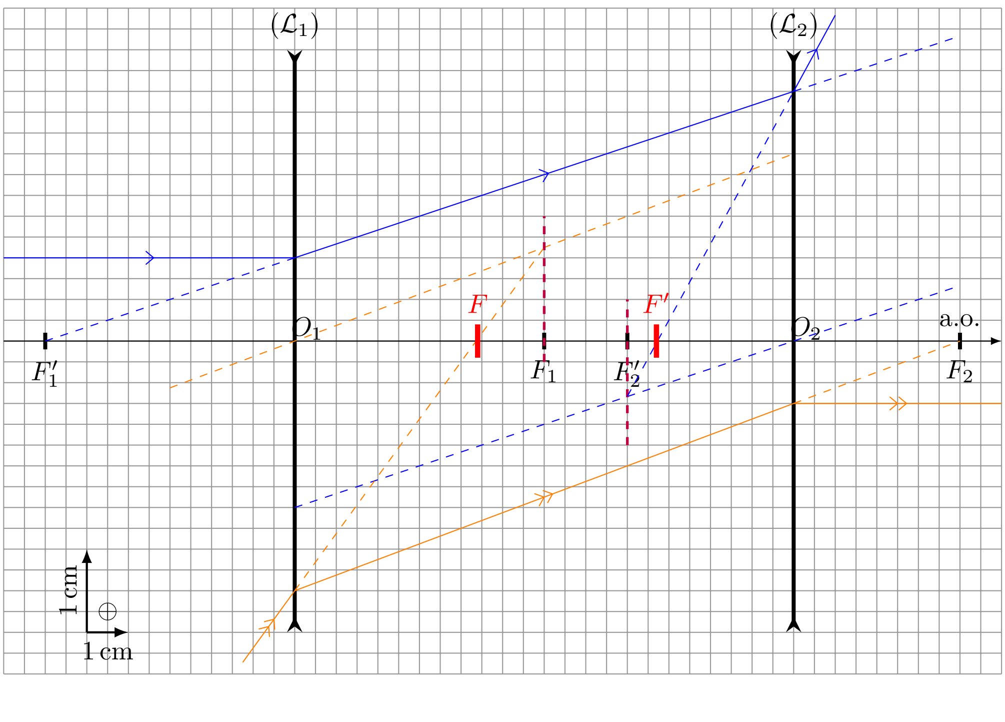
V - Doublet non accolé

Comme $V_1 = -16,7\,\delta$, on a $f'_1 = \frac{1}{V_1} = -\frac{1}{16,7}\mathrm{m} = -\frac{100}{16,7}\mathrm{cm} = -6\,\mathrm{cm}$.
De même $V_2 = -25\,\delta$ implique $f'_2 = \frac{1}{V_2} = -\frac{1}{25}\mathrm{m} = -\frac{100}{25}\mathrm{cm} = -4\,\mathrm{cm}$

1. Par définition, F' est l'image par le doublet de lentilles d'un objet situé à l'infini sur l'axe optique. Il suffit donc pour trouver F' de construire le chemin d'un rayon incident parallèle à l'axe optique à travers (L_1) puis (L_2), F' se situera à l'intersection entre le rayon émergent et l'axe optique.
   Voir la construction à la question 3., les rayons permettant de construire F' sont en bleu. On n'oublie pas : les chevrons distinctifs de chaque rayon, les prolongations de rayons utiles à la compréhension, que les rayons auxiliaires sont en pointillés, deux échelles (longitudinale et verticale), l'orientation de l'axe optique, le nom de tous les points optiques importants (centre, foyers, etc.).

2. On a, par définition de F' : $\infty \xrightarrow{(L_1+L_2)} F'$
   Par décomposition du doublet on peut aussi écrire : $\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1 \xrightarrow{(L_2)} F'$
   F' est donc l'image de F'_1 par la lentille (L_2).
   Résolution 1 : on applique la relation de Newton aux foyers pour la lentille (L_2) :
   $$\overline{F'_2F'} \cdot \overline{F_2F'_1} = -f'^2_2 \text{ d'où } \overline{F'_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'} = \frac{-f'^2_2}{\overline{F_2F'_1}}$$
   Résolution 2 : on applique la relation de Descartes au centre pour la lentille (L_2) :
   $$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \text{ d'où } \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'} = \frac{\overline{O_2F'_1}f'_2}{\overline{O_2F'_1} + f'_2}$$
   Dans les deux cas, on trouve alors en isolant $\overline{O_1F'}$ et en faisant apparaître les données de l'énoncé par des décompositions de type « Chasles » (possibles car tous les points sont alignés) :
   $$\boxed{\overline{O_1F'} = \frac{-f'^2_2}{f'_2 - \overline{O_1O_2} + f'_1} + f'_2 + \overline{O_1O_2}}$$
   A.N. (à la main) : $\overline{O_1F'} = \frac{16}{22} + 8,00 = 0,73 + 8,00 = 8{,}7\,\mathrm{cm}$.
   Remarque : il est judicieux de vérifier que la valeur calculée est cohérente avec la position du point F déterminée à la question précédente.

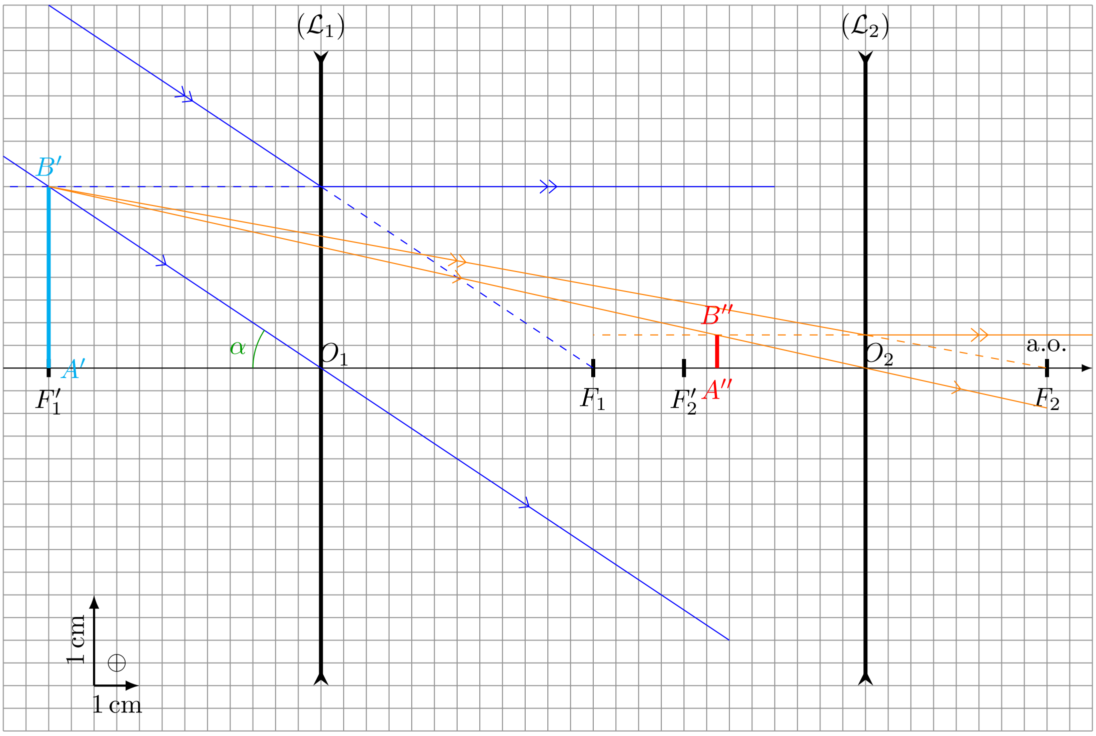
3. F est le point dont l'image par le doublet de lentilles se situe à l'infini sur l'axe optique. Il faut donc construire l'antécédent d'un rayon émergeant quelconque parrallèle à l'axe optique. F se situera à l'intersection entre le rayon incident et l'axe optique. Sur la figure ci-dessous, les rayons permettant de construire F sont en orange.



4. $F \xrightarrow{(L_1+L_2)} \infty$ et $F \xrightarrow{(L_1)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty$. F est donc l'objet dont F_2 est l'image par la lentille (L_1). Par application d'une relation de conjugaison de la lentille (L_1), on trouve :

$$\boxed{\overline{O_1F} = \frac{(\overline{O_1O_2} - f_2')f_1'}{-(\overline{O_1O_2} - f_2') + f_1'}} = 4{,}36\,\text{cm} = 4{,}4\,\text{cm}$$

5. Comme $\tan 19\,° \approx \frac{1}{3}$, les rayons parallèles représentant B sont incliné de 1 cm verticalement pour 3 cm parcourus le long de l'axe optique. On construit l'image intermédiaire B' à travers (L_1) à partir de 2 rayons issus de B : celui passant par O_1 et celui passant par F_1 (rayons bleus sur la figure). A' est alors obtenu par aplanétisme. On construit ensuite l'image B'' de B' à travers (L_2) à partir de 2 rayons issus de B' : celui passant par O_2 et celui passant par F_2 (rayons orange sur la figure). A'' est alors obtenu par aplanétisme.



6. On passe par l'image intermédiaire $A'B'$ on a $AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'B' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A''B''$. L'objet AB étant à l'infini, on a $A' \equiv F_1'$. On note $\Delta = \overline{O_1O_2}$.
   - Position de l'image : on utilise la formule en position pour $\mathcal{L}_2$:

   $$\overline{O_2A''} = \frac{\overline{O_2F_1'}f_2'}{\overline{O_2F_1'}f_2'}$$

   et donc

   $$\overline{O_1A''} = \Delta + \frac{f_2'(f_1' - \Delta)}{f_1' + f_2' - \Delta}$$

   A.N. (toutes les distances sont en cm) : $\overline{O_1A''} = 12 + \frac{-4\times(-6-12)}{-4-6-12} = 12 - \frac{6\times 16}{22}$ soit $\underline{\overline{O_1A''} = 8{,}7\,\text{cm}}$.
   - Taille de l'image : AB étant à l'infini, $A'B'$ est sur le plan focal image de $\mathcal{L}_1$. Par aplanétisme, le triangle $(O_1A'B')$ est rectangle et on a $\tan\alpha = \frac{A'B'}{O_1A'}$ ou, comme $\overline{A'B'} > 0$, $\overline{A'B'} = -f_1' \tan\alpha$.
   On utilise maintenant la formule en grandissement pour $\mathcal{L}_2$:

   $$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'}} = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{\overline{O_1A''} - \Delta}{f_1' - \Delta}$$

   Finalement

   $$\overline{A''B''} = -f_1' \tan\alpha \left(\frac{\overline{O_1A''} - \Delta}{f_1' - \Delta}\right)$$

   A.N. (distances en cm) : $\overline{A''B''} = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{8{,}7-12}{-6-12} = 2 \times \frac{3{,}3}{18}$ soit $\underline{\overline{A''B''} = 0{,}36\,\text{cm}}$.

Remarque : on pensera à vérifier que les valeurs numériques obtenues sont bien cohérentes avec la figure (y compris le signe).