Correction OS – TD 4

Signaux électriques dans l'ARQS

I - Modèle de pile

1. Modèle de Thévenin de tension U et d'intensité du courant I, en convention générateur : $U = E - RI$. On pose : ($U_1 = 2{,}2\,\mathrm{V}\,; I_1 = 0{,}20\,\mathrm{A}$) et ($U_2 = 3{,}0\,\mathrm{V}\,; I_2 = 0{,}12\,\mathrm{A}$). On trouve rapidement :

$$\boxed{R = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}} = 1 \cdot 10^1\,\Omega$$

et

$$\boxed{E = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}} = 4{,}2\,\mathrm{V}$$

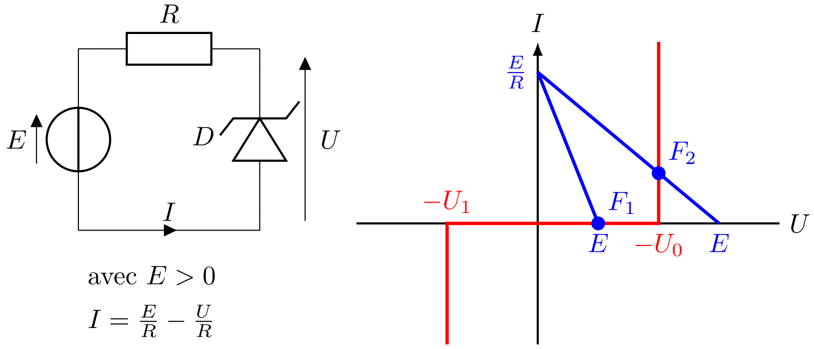
2. Puissance fournie au reste du circuit : $\boxed{\mathcal{P} = U_2 I_2} = 0{,}36\,\mathrm{W}$.

   Puissance reçue puis dissipée par effet Joule à l'intérieur de la pile : $\boxed{\mathcal{P}_J = R I_2^2} = 0{,}14\,\mathrm{W}$.

II - Fonctionnement d'un circuit à diode Zener

1. Le circuit est constitué de deux blocs en série :
   - à gauche, un générateur de Thévenin en convention générateur, dont la caractéristique est donnée par l'équation : $I = \frac{E-U}{R}$;
   - à droite la diode Zener dont la caractéristique est donnée par l'énoncé.

   Le point de fonctionnement est l'intersection des deux caractéristiques. Il y a deux possibilités :
   - si $E < U_1$ alors le point de fonctionnement est F_1 avec pour coordonnées : $U = E$ et $I = 0$; le courant étant nul, on dit que la diode est bloquée ;
   - si $E > U_1$ alors le point de fonctionnement est F_2 avec pour coordonnées : $U = U_1$ et donc $I = \frac{E-U_1}{R} > 0$; le courant étant non-nul, on dit que la diode est passante.
2. On inverse la diode. Pour savoir comment représenter la caractéristique de cette diode montée à l'envers, il suffit de partir de la caractéristique de la diode montée à l'endroit et d'opposer courant et intensité.



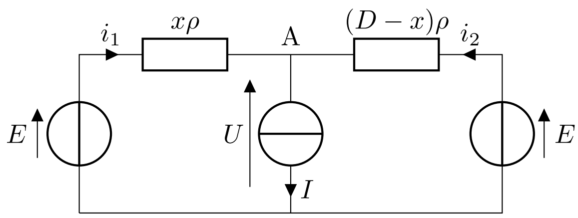
On retrouve alors une discussion semblable à celle de la question 1. :
- si $E < -U_0$ alors le point de fonctionnement est F_1 avec pour coordonnées : $U = E$ et $I = 0$; le courant étant nul, on dit que la diode est bloquée ;
- si $E > -U_0$ alors le point de fonctionnement est F_2 avec pour coordonnées : $U = -U_0$ et donc $I = \frac{E+U_0}{R} > 0$; le courant étant non-nul, on dit que la diode est passante.

III - Puissance électrique

1. On peut déterminer la résistance équivalente R_{BC} entre les points B et C : $R_{BC} = \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}$.
   A.N. : $R_{BC} = 8\,\Omega$
   Entre les noeuds A et C, on a alors $R_4 \,/\!/\, (R_1 s(R_{BC}))$ soit $R_{AC} = \frac{R_4(R_1+R_{BC})}{R_4+R_1+R_{BC}}$
   A.N. : $R_{AC} = 15\,\Omega$
2. On peut appliquer un pont diviseur de tension sur les résistances R_1 et R_{BC} : $u_{BC} = \frac{R_{BC}}{R_1} u_{AC}$
   A.N. : $u_{BC} = 8\,\text{V}$
3. La résistance totale équivalente à l'association des résistances R_1, R_2 et R_3 est égale à la résistance R_4. On a donc $i_1 = i_4 = \frac{i_{AC}}{2} = \frac{u_{AC}}{2R_{AC}}$
   A.N. : $i_1 = i_4 = 1\,\text{A}$
   On peut ensuite appliquer un pont diviseur de courant pour déterminer i_2 et i_3 : $i_2 = \frac{R_3}{R_2+R_3} i_1$ et $i_3 = \frac{R_2}{R_2+R_3} i_1$
   A.N. : $i_2 = 0{,}33\,\text{A}$ et $i_2 = 0{,}67\,\text{A}$
4. La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R_4 est donnée par $P_4 = u_{AC} i_4 = R_4 i_4^2 = \frac{u_{AC}^2}{R_4}$.
   A.N. $P_4 = 30\,\text{W}$

IV - Alimentation électrique d'un train

1. D'après les schémas, U et I sont ne sont pas orientés dans le même sens : le dipôle représentant la motrice est orienté en convention récepteur. Le rôle de la motrice est de transformer l'énergie électrique fournie par les sous-station en énergie mécanique : du point de vue du circuit électrique, son rôle « physique » est d'être un dipôle récepteur. En convention récepteur, la puissance électrique est la puissance fournie par le circuit au dipôle. On en déduit ici $\mathcal{P} = UI > 0$. Comme $I > 0$, on a finalement $\boxed{U > 0}$.
2. On reproduit le schéma de l'énoncé en y ajoutant les courant dans les deux branches de la caténaire. En appliquant la loi des mailles sur les mailles de gauche et de droite, on a



$$U + x\rho i_1 = E \quad \text{et} \quad U + (D-x)\rho i_2 = E$$

   De plus, la loi des nœuds appliquée en A donne

$$I = i_1 + i_2$$

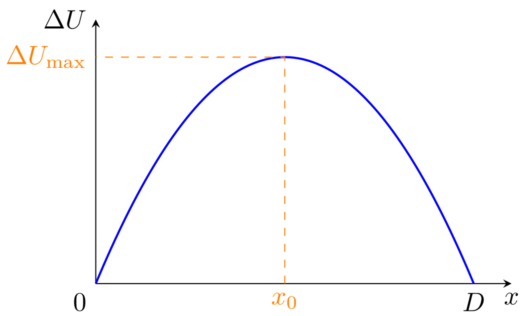
   soit, en reportant les expressions obtenues grâce aux lois des mailles

$$I = \frac{E-U}{x\rho} + \frac{E-U}{(D-x)\rho}.$$

   Ainsi $(E-U)\left[(D-x)+x\right] = x(D-x)\rho I$ et finalement $\boxed{U = E - \rho\frac{x(D-x)}{D} I}$.

3. On a directement $\boxed{\Delta U = \rho \frac{x(D-x)}{D} I}$
4. $\Delta U(x)$ est un polynôme du second degré, dont les racines sont $x = 0$ et $x = D$ et dont le coefficient du terme d'ordre 2 est négatif. On en déduit directement l'allure suivante :
   Par symétrie, le maximum se situe au milieu des deux racines, on trouve alors $x_0 = \frac{D}{2}$[1] et $\Delta U_{\max} = \Delta U(x_0)$ soit

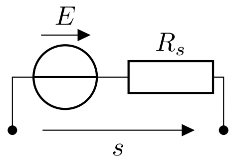
$$\boxed{\Delta U_{\max} = \rho \frac{D}{4} I}.$$



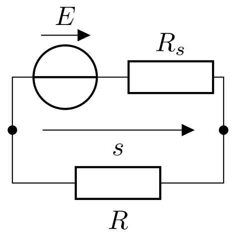
5. En utilisant les données de l'énoncé, on trouve $D_{\max} = \frac{4\Delta U_{\max}}{\rho I} = \frac{4\times 45{,}0}{5{,}00\cdot 10^{-5}\times 800} = 4{,}50 \cdot 10^3\,\text{m}$ ou $D_{\max} = 4{,}50\,\text{km}$.

1. On aurait pu utiliser cet argument de symétrie dès le début : les deux sous-stations étant strictement identiques, l'emplacement du maximum n'a pas de raison d'être plus proche de l'une que de l'autre. Il se situe donc au milieu et on trouve directement $x_0 = D/2$.

V - Influence des résistances d'entrée et de sortie



1. Le générateur étant en circuit ouvert, le courant à travers la résistance R_s est nul, on a donc $\boxed{s = E}$.



2. Le circuit est maintenant fermé par la résistance R. On reconnait un pont diviseur de tension, on peut ainsi écrire

$$\boxed{s = \frac{R}{R+R_s}E}.$$

Pour $R = 50\,\Omega = R_s$, on a $s = \frac{E}{2}$. Pour $R = 5{,}0\,\mathrm{k\Omega} = 100\,R_s$, on a $s = \frac{100}{101}E = 0{,}99E \approx E$.

3. D'après l'expression obtenue précédemment $s \leq E$, on cherche donc R pour que $s > 0,95E$ soit

$$\frac{R}{R+R_s}E > 0,95E \implies R > 0,95(R+R_s) \implies 0,05R > 0,95R_s$$

et donc $\boxed{R > 19\,R_s}$. A.N. : $R > 950\,\Omega$.
Pour que le générateur de Thévenin se comporte comme un générateur idéal de tension, c'est-à-dire pour avoir $s \approx E\,\forall i$, il faut donc $R \gg R_s$.

4. On veut ici $s = E/2$ soit $\frac{R}{R+R_s} = \frac{1}{2}$. On retrouve rapidement l'expression déjà obtenue à la question 2 (et en cours !) $\boxed{R = R_s}$

On peut en déduire une méthode exprérimentale pour déterminer R_s (dite méthode de la demi-tension) :
— On détermine dans un premier temps E en mesurant la tension à vide aux bornes du générateur ;
— On branche ensuite une résistance variable (en pratique on utilisera une boite à décade) et on modifie R jusqu'à avoir $s = E/2$: si $s > E/2$, on diminue R, si $s < E/2$, on augmente R ;
— on lit la valeur de R une fois cette égalité atteinte, il s'agit directement de la résistance R_s recherchée.

5. On ajoute un dipôle au circuit, ce qui le modifie. Cela va a priori influer sur la valeur de s.
Si la mesure était effectuée à vide (question 1), le circuit est maintenant fermé et on se retrouve dans la configuration de la question 2 avec $R = R_e$. On a alors $s = \frac{R_e}{R_e+R_s}E$. compte tenu des valeurs des résistances ($R_s = 50\,\Omega$ et $R_e = 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$), le résultat de la mesure reste inchangé.
Dans le cas où une résistance R était déjà branchée aux bornes du générateur (question 2), on ajoute au circuit la résistance R_e en parallèle. On peut ainsi reprendre les résultats obtenus en remplaçant R par la résistance équivalente à R et R_e en parallèle : $R' = \frac{RR_e}{R+R_e}$ et donc $s = \frac{R'}{R'+R_s}E$. Deux cas sont à envisager : soit $R \gg R_s$, on a alors également $R' \gg R_e$ et on a toujours $s = E$; sinon on a alors $R_e \gg R$ et alors $R' \approx R$ et on retrouve $s = \frac{R}{R+R_s}E$. Dans tous les cas, <u>l'ajout de l'appareil de mesure n'influe pas sur la valeur de s mesurée</u>.

6. Un pont diviseur donne directement le résultat : $s = \frac{R}{R+R}E$ et donc $\boxed{s = \dfrac{E}{2}}$.

7. On peut remplacer les deux résistances R et R_e en parallèle par leur résistance équivalente $R' = \frac{RR_e}{R+R_e}$.
Pour $R = R_e$, on a $R' = \frac{R}{2}$ et, en appliquant de nouveau la relation du pont diviseur de tension

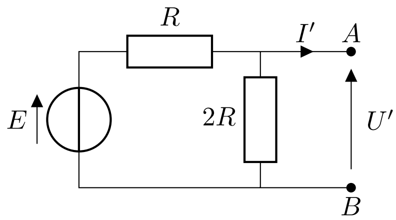
$$s = \frac{R'}{R'+R}E = \frac{\frac{R}{2}}{R+\frac{R}{2}}E \quad \text{soit} \quad \boxed{s = \frac{E}{3}}.$$

De façon générale, l'influence de l'appareil de mesure est négligeable à condition que $R' \approx R$. Il faut donc $R_e \gg R$, on retrouve alors $s \approx \frac{R_e}{2R_e}E = \frac{E}{2}$.

8. En regroupant les conditions sur R_s et R_e, on peut conclure qu'il faut travailler avec des résistances R telles que $R_s \ll R \ll R_e$ soit en pratique $50\,\Omega \ll R \ll 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$.

VI - Modèle de Thévenin

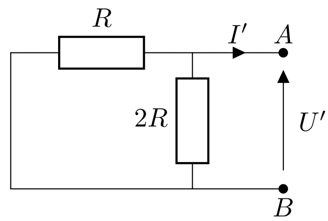
1. On obtient :



2. Dans cette question, on suppose $I' = 0$ donc on peut appliquer une relation de pont diviseur de tension entre R et $2R$.

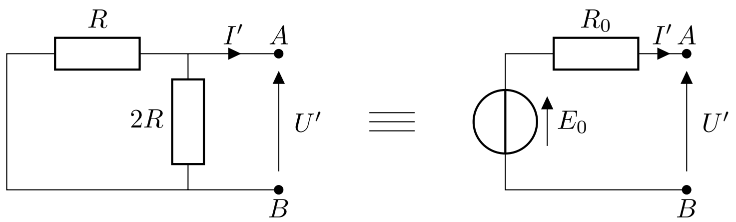
   $U'_{(I'=0)} = \frac{2R}{2R+R}E$ d'où $\boxed{U'_{(I'=0)} = \dfrac{2E}{3}}$.

3. On éteint la source ($E = 0$) et on obtient le circuit équivalent :



   Et, immédiatement : $\boxed{R_{AB} = (R \,/\!\!/\, 2R) = \dfrac{2}{3}R}$. On remarque également, qu'une fois l'équivalence des résistances réalisées, on a $R_{AB} = -\left(\frac{U'}{I'}\right)_{E=0}$.

4. Pour simplifier le circuit, on cherche le générateur de Thévenin équivalent à toute la partie gauche du circuit sans la résistance $3R$, c'est-à-dire à obtenir l'équivalence :



   Étant données les réponses aux questions précédentes, on a :

$$U' = \frac{2E}{3} - \frac{2}{3}RI'$$

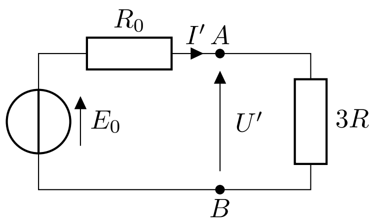
   et d'autre part, on a :

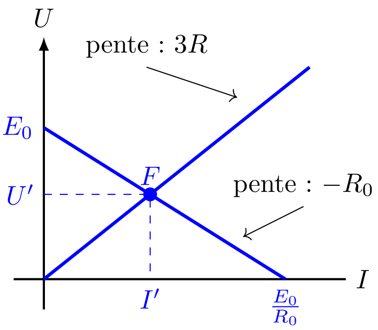
$$U' = E_0 - R_0 I'$$

   Pour qu'il y ait équivalence, il faut que les deux expressions soient simultanément vérifiées quelles que soient les valeurs de U' et I'. On en déduit que

$$\boxed{E_0 = \frac{2E}{3} \quad \text{et} \quad R_0 = \frac{2}{3}R}$$

5. Le schéma du circuit complet simplifié est donné ci-dessous avec les caractéristiques associées aux deux côtés du circuit :





   Ce qui correspond aux équations : $U' = E_0 - R_0 I'$ et $U' = 3RI'$. On détermine facilement :

$$\boxed{U' = \frac{3R}{R_0 + 3R}E_0 = \frac{6}{11}E \quad \text{et} \quad I' = \frac{E_0}{R_0 + 3R} = \frac{2E}{11R}}$$

VII - Équivalence triangle-étoile

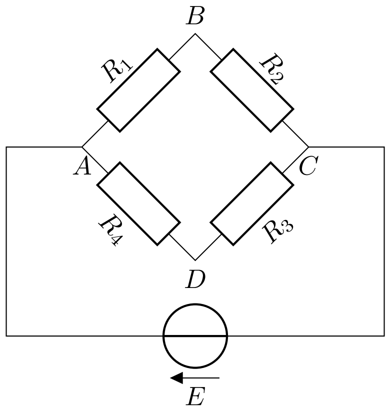
1. Pour le montage en triangle : $U_{AB} = R_1 i_1 - R_2 i_2$. Pour le montage étoile : $U_{AB} = r_3 j_3$
2. On regarde le montage étoile. La loi des nœuds en A et B donne respectivement $j_3 = i_1 + j_2$ et $j_1 = i_2 + j_3$
   La loi des mailles appliquée sur la maille $(ABCA)$ donne : $u_{AB} + u_{BC} + u_{CA} = 0$, soit en injectant la loi d'Ohm sur chacune des résistances intervenant dans cette maille : $r_3 j_3 + r_1 j_1 + r_2 j_2 = 0$. On remplace alors j_1 et j_2 par les expressions trouvées précédemment et on obtient : $r_1(j_3 + i_2) + r_2(j_3 - i_1) + r_3 j_3 = 0$.
   On isole alors j_3 : $j_3 = \frac{r_2}{r_1+r_2+r_3} i_1 - \frac{r_1}{r_1+r_2+r_3} i_2$
3. En identifiant les deux expressions de U_{AB} obtenues en 1, on a alors :

$$\boxed{R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{r_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3}}$$

4. En tenant compte des symétries du problème, on permute les indices pour obtenir $R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2+r_3}$

VIII - Pont de Wheatstone

1. Si I_G est nul alors aucun courant ne circule dans la branche BD, qui est alors équivalente à un interrupteur ouvert, et les résistances R_1 et R_2 sont en série de même que les résistances R_3 et R_4. Le circuit équivalent au pont de Wheatstone quand $I_G = 0$ est donc le suivant :



   On peut donc écrire des relations de pont diviseurs de tension.

$$v_A - v_B = U_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{AC} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E \qquad (1.1)$$

$$v_A - v_D = U_{AD} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_{AC} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E \qquad (1.2)$$

   D'autre part, comme suggéré par l'énoncé, on a $v_B - v_D = U_{BD} = r_G I_G = 0$ lorsque $I_G = 0$, donc $v_B = v_D$ et les expressions (1) et (2) sont égales, ce qui mène à :

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} E = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E$$

   puis à

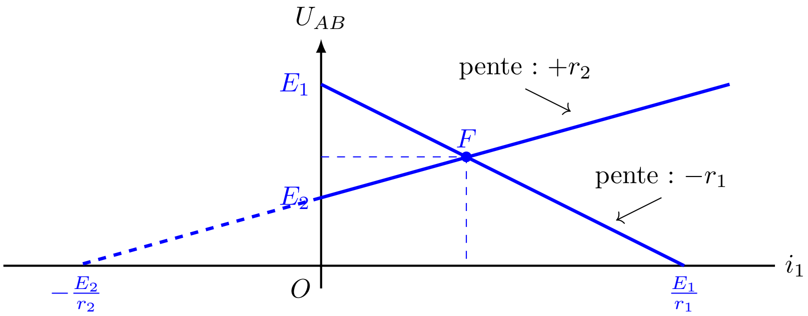
$$\boxed{R_1 R_3 = R_2 R_4}$$

2. À l'équilibre du pont, on a $R_4 = \dfrac{R_1 R_3}{R_2}$. La méthode de mesure de R_4 repose sur la recherche de l'équilibre du pont de Wheatstone, c'est-à-dire sur la recherche de la nullité de I_G. On choisit pour R_1, R_2 et R_3 trois résistors de résistances variables et on dispose alors de trois paramètres pour régler le pont. I_G est fonction de R_1, R_2 et R_3 c'est-à-dire que la modification des valeurs de R_1, R_2 et R_3 modifie la valeur de l'intensité du courant I_G. Grâce à une méthode de « recherche de zéro » par encadrement successifs (similaire à une méthode dichotomique en algorithmique), on trouve un encadrement des valeurs de $\frac{R_1 R_3}{R_2}$ permettant d'obtenir $I_G = 0$ aux incertitudes de mesure près ; ce qui donne une mesure de R_4 (valeur et intervalle).
   Le pont de Wheatstone est un pont de mesure très couramment utilisé dans les jauges de contrainte, permettant de mesurer des pressions en utilisant un résistor piézoélectrique dont la résistance varie avec la pression. L'asservissement du pont à l'équilibre permet de déterminer la valeur de la résistance et donc celle de la pression.
   La méthode utilisée pour la mesure d'une résistance d'un résistor est généralisable à n'importe quel autre dipôle, en se plaçant en régime sinusoïdal forcé et en utilisant la notion d'impédance (pont de Maxwell par exemple).

IX - Attention danger

1. $\boxed{i = i_1 + i_2}$
2. $\begin{cases} U_{AB} & = & E_1 - r_1 i_1 \\ U_{AB} & = & E_2 - r_2 i_2 \end{cases}$
3. (a) $i_2 = -i_1$ d'où $\boxed{U_{AB} = E_2 + r_2 i_1}$

   (b) Les caractéristiques des deux générateurs de Thévenin sont donc



   (c) Au point d'intersection (F) $E_1 - r_1 i_1 = E_2 + r_2 i_1$, d'où $\boxed{i_1 = \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}}$

   (d) Les défauts sont r_1 et r_2. Si ces défauts sont très faibles alors leur somme $r_1 + r_2$ l'est aussi et i_1 peut devenir très élevée dès que $E_1 \neq E_2$. Graphiquement, sur les caractéristiques, r_1 et r_2 se traduisent par des pentes très faibles, rejetant leur intersection vers les valeurs très élevées de i_1. À la limite des sources de tension parfaites : $\lim\limits_{(r_1+r_2)\to 0} i_1 = +\infty$

   Le circuit risque de brûler/fondre par effet Joule. Au laboratoire, les sources de tension sont conçues avec des résistances internes suffisamment élevées pour limiter les risques. Néanmoins, on recommande de ne jamais brancher de générateurs de tension en parallèle.

X - Chaîne infinie

En commençant les équivalences de résistances par la droite, on obtient par récurrence :

$$\boxed{R_{AB} = r}$$