OS – TD 7

Oscillateurs amortis en régime transitoire

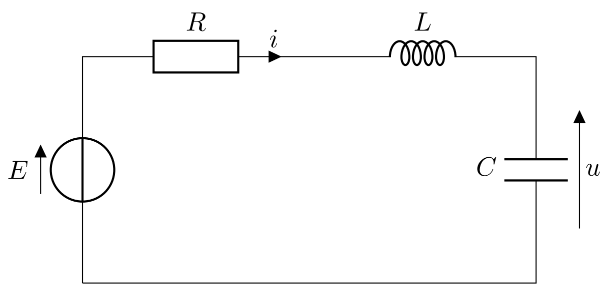
Méthodes, compétences et savoirs-faire

Cahier d'entraînement

Fiche d'entraînement n°6 – Étude des circuits électriques II – Exercices 6.16 à 6.19

I - Décrément logarithmique

On considère un circuit RLC série, soumis à un échelon de tension :



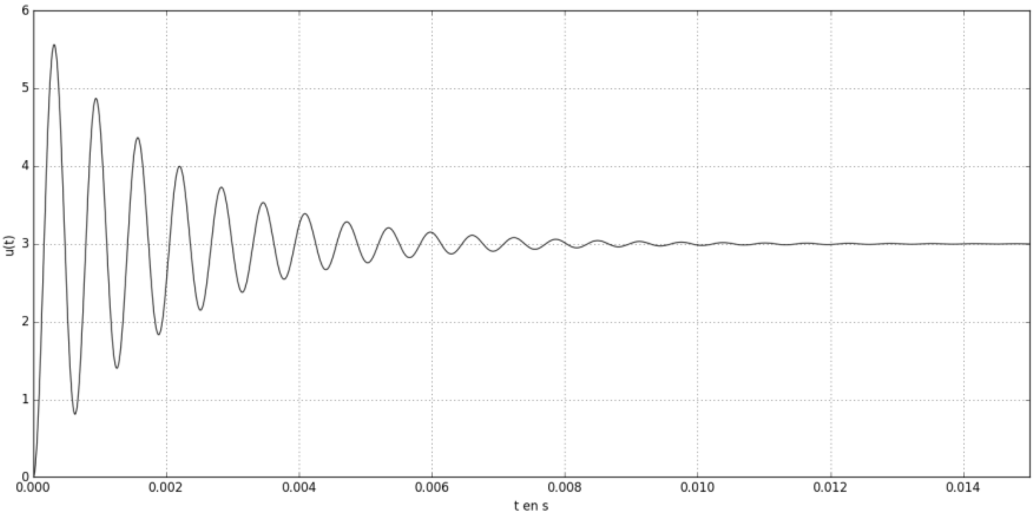
1. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de $u(t)$. Vous expliciterez la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des paramètres du problème.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que le régime transitoire obtenu est pseudo-périodique.

2. Quelle condition cela implique-t-il sur la valeur de Q ?
3. Exprimer $u(t)$ en faisant apparaitre le temps de relaxation τ, la pseudo-pulsation ω et la tension atteinte une fois le régime permanent final établi u_∞.
4. Exprimer la pseudo-période T en fonction de la période associée à la pulsation propre T_0. Que peut-on en dire si $Q \gg 1$?
5. On définit n le nombre d'oscillations effectuées par la tension avant que le régime transitoire disparaisse. Exprimer n en fonction de Q. Simplifier cette expression dans le cas où $Q \gg 1$.
6. Tracer le chronogramme de $u(t)$ en prenant $Q = 5$.

On définit le **décrément logarithmique** δ par : $\boxed{\delta = \ln\left(\dfrac{u(t) - u_\infty}{u(t+T) - u_\infty}\right)}$

7. Montrer que $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$. Simplifier l'expression précédente dans le cas où $Q \gg 1$.
8. On a obtenu l'oscillogramme suivant. Déterminer la valeur de T et δ. En déduire la valeur de Q et ω_0.



II - Régime transitoire d'un circuit RLC parallèle

On étudie le circuit de la figure 1.1, appelé « circuit bouchon ».

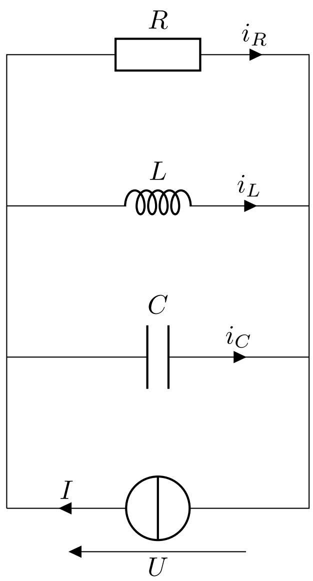


FIGURE 1.1 – Circuit bouchon, pour $t > 0$, avec $I = Cste$.

1. Donner les relations entre :
   (a) i_R et u,
   (b) i_L et u,
   (c) i_C et u.

La source est éteinte. On l'allume à $t = 0$, ce qui produit un échelon de courant I.

2. Déterminer la valeur finale de u en utilisant uniquement des raisonnements sur les comportements asymptotiques des dipôles quand le régime permanent sera atteint.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par u pour $t > 0$.
4. Après avoir rappelé la forme canonique de ce type d'équation différentielle, définir le facteur d'amortissement α, la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.
5. On donne $R = 10\,\text{k}\Omega$, $L = 1{,}0 \cdot 10^2\,\text{mH}$ et $C = 0{,}10\,\mu\text{F}$. Calculer Q, ω_0 et α.

6. Résoudre l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle. On prendra soin d'introduire, en les explicitant, les notations classiques associées à ce type de problème de façon à avoir des expressions simples pour les racines de cette équation.
7. En déduire la nature du régime transitoire obtenu et la forme générale de la solution $u(t)$. On ne cherche pas à cette étape à déterminer les constantes d'intégration.

On dispose des conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} i_L(t=0^-) &= i_0 \\ q(t=0^-) &= q_0 \end{aligned}$$

8. Traduire ces conditions initiales de manière à obtenir les valeurs de $u(t=0^+)$ et $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{(t=0^+)}$ en fonction de R, C, q_0, I et i_0.
9. Terminer la résolution de l'équation différentielle en donnant l'expression finale complète de $u(t)$. Vérifier qu'elle permet bien de retrouver les conditions initiales.

III - Amortisseurs de voiture – Étude statique et régime transitoire ■■□

On modélise un des quatre systèmes amortisseurs de la suspension d'une petite voiture télécommandée roulant sur une surface parfaitement horizontale par un objet ponctuel de masse m (représentant un quart de la masse du véhicule), et repéré par la position M, attaché à une extrémité d'un ressort vertical de raideur $k = 10\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 50\,\mathrm{cm}$ dont l'autre extrémité est liée à un point O (la roue) situé au sol et qui est le point le plus bas du dispositif.
On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{OM} = z\,\vec{u}_z$. Pour les applications numériques, on prendra $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Le point O et l'axe (Oz) sont fixes dans le référentiel d'étude.
En plus de son poids et de la force de rappel élastique, l'objet est soumis à des frottements fluides dont on modélise l'effet de façon linéaire par l'expression $\vec{F} = -h\,\vec{v} = -h\,v\,\vec{u}_z$ où $v = \dot{z}$ est la vitesse verticale de l'objet dans le référentiel d'étude. Le coefficient h peut-être réglé par la variation du débit d'huile à travers un trou percé dans le piston mobile de l'amortisseur.
Pour une raison quelconque, l'objet a, à $t = 0$, la vitesse $\dot{z}(t=0) = v_0$ et la position initiale z_0. À l'aide de différents capteurs, on relève en fonction du temps l'évolution de sa position z et de sa vitesse $\dot{z}$. Ces données permettent de tracer la représentation de la figure 1.2, pour $t \geq 0$.

1. Déduire de la représentation de la figure 1.2 :
   (a) une estimation de la vitesse initiale v_0 de l'objet ;
   (b) une estimation de sa position initiale z_0 ; le ressort est-il initialement comprimé ou étiré ?
   (c) une estimation de la longueur à l'équilibre z_{eq} du ressort ;
   (d) la nature du régime transitoire ;
   (e) une estimation du facteur de qualité du système (justifier).
2. À l'aide de la question précédente, prévoir l'allure de z en fonction du temps et la tracer en légendant le chronogramme et en reportant un maximum d'informations.
3. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de z en fonction du temps.
4. À l'aide de l'équation précédente, déterminer l'expression de la position d'équilibre z_{eq} qui est la garde au sol du véhicule en régime stabilisé. En déduire à l'aide de la question 1 une estimation de la valeur de la masse m à deux chiffres significatifs.

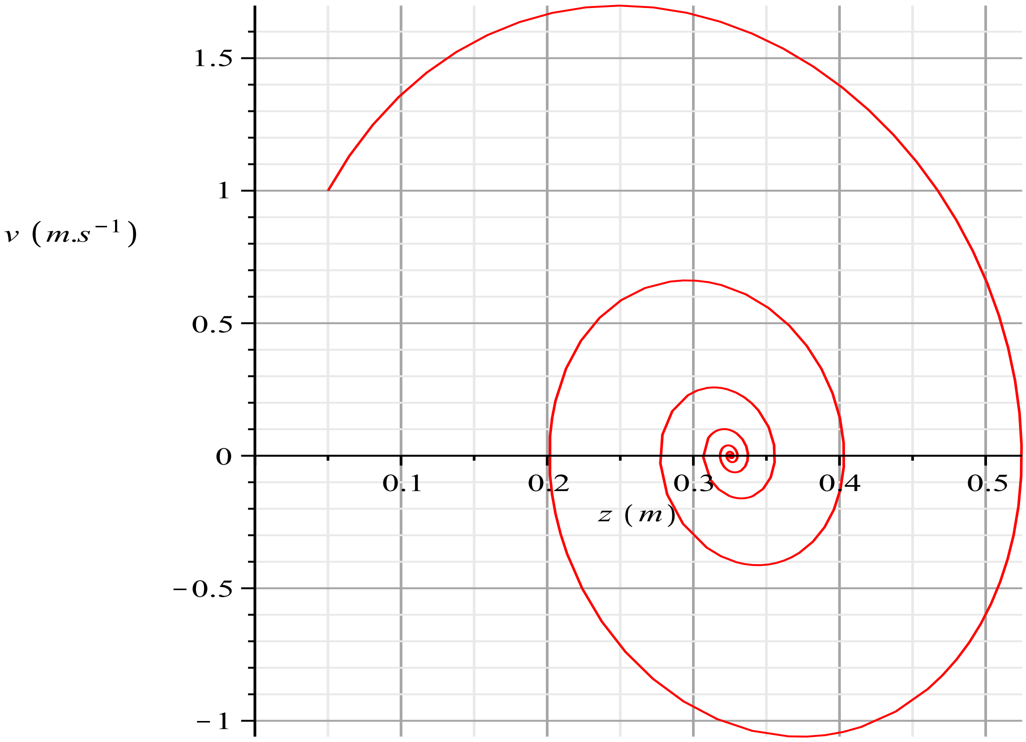


FIGURE 1.2 – Représentation de la vitesse de l'objet de masse m en fonction de la position en unités du système international pour $t \geq 0$. La courbe se lit chronologiquement dans le sens horaire. Elle est complète, c'est-à-dire que la totalité des données en vitesse et position pour $t \in [0\,;\,+\infty[$ sont représentées.