

Correction OS – TD 8

Impédances complexes et régimes sinusoïdaux forcés

Méthodes, compétences et savoirs-faire

1 - Formalisme complexe

- Pour passer du signal réel $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ à sa représentation complexe $\underline{s} = \underline{S}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{S}_0 = S_0 e^{j\varphi}$.
- Pour passer de la représentation complexe du signal $\underline{s}$ au signal réel : $s(t) = \Re(\underline{s})$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \triangleright \underline{u} &= (U_0 e^{j\frac{\pi}{4}}) e^{j\omega t} \\ \triangleright \underline{i} &= (I\sqrt{2} e^{-j\psi}) e^{j\omega t} \\ \triangleright \underline{s} &= (S_m e^{-j\frac{\pi}{2}}) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright u(t) &= U_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) \\ \triangleright i_1(t) &= \frac{U_0}{R} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t) \\ \triangleright u(t) &= I_m \cos(\omega t - \frac{5\pi}{6}) \end{aligned}$$

2 - Circuit simple en RSF

1. La résistance et la bobine sont en série, on peut appliquer un pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} \underline{e} \quad \text{soit} \quad \underline{u} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{e}$$

2. On a ainsi $(R + jL\omega) \underline{u} = jL\omega \underline{e}$ ce qui donne, en repassant aux signaux réels

$$Ru + L \frac{du}{dt} = L \frac{de}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} + \frac{R}{L} u = \frac{de}{dt}$$

3. (a) L'amplitude réelle U est le module de l'amplitude complexe $\underline{U}$, avec $\underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t}$ et $\underline{e} = E e^{j\omega t}$. On a alors

$$\underline{U} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E \quad \text{et} \quad U = \left| \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E \right|$$

soit

$$U = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} E$$

- (b) Le déphasage φ est défini par

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_e = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{E}) = \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{E}}\right) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right)$$

On a donc

$$\varphi = \arg\left(\frac{jL\omega}{R + jL\omega}\right) = \arg(jL\omega) - \arg(R + jL\omega)$$

Pour le deuxième terme, sa partie réelle R est positive, on peut directement utiliser la fonction arctangente et ainsi

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

I - Association RL série

1. Les deux dipôles sont en série, leurs impédances s'ajoutent. En notant ω la pulsation du régime permanent sinusoïdal forcé : $\underline{Z} = R + jL\omega$

Pour les questions suivantes, on commence par littéraliser le problème. On pose :

- $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi_u)$, c'est-à-dire $u_m = 230\sqrt{2}$ V ; $\varphi_u = 0$; $\omega = 100\pi$ rad s⁻¹ ;
- $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi_i)$;
- $\underline{u} = \underline{u}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{u}_m = u_m e^{j\varphi_u}$; avec $u(t) = \text{Re}(\underline{u})$.
- $\underline{i} = \underline{i}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{i}_m = i_m e^{j\varphi_i}$; avec $i(t) = \text{Re}(\underline{i})$.

2. On a $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$, on en déduit :

- $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$;
- $\frac{u_m}{i_m} = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$.

Finalement :

$$\varphi_i = -\arg(\underline{Z}) = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) ; i_m = \frac{u_m}{|\underline{Z}|} = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$\varphi_i < \varphi_u$ donc i est en retard sur u , ce qui est le comportement attendu pour un circuit inductif.

3. (a) $R = 1 \Omega$ et $L\omega > 0$ donc $\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} > 1 \Omega$ donc $i_m = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} < \frac{230\sqrt{2}}{1 \Omega} \text{ V} = 325 \text{ A}$. Les seules réponses possibles sont donc $i_m = 125 \text{ A}$ et $i_m = 267 \text{ A}$. On fait l'application numérique pour $|\underline{Z}|$. On trouve : $|\underline{Z}| = \sqrt{(1 \Omega)^2 + (2,20 \cdot 10^{-3} \text{ H} \times 100 \times 3,14 \text{ rad/s})^2} \approx \sqrt{1,5} \Omega \approx 1,2 \Omega$, ce qui suffit pour conclure que $i_m = 267 \text{ A}$.
- (b) $\varphi_i < 0$ donc $\varphi = -0,604 \text{ rad}$ seule valeur possible.

Remarque : les valeurs $230\sqrt{2}$ V pour une amplitude de tension et 100π rad s⁻¹ pour une pulsation sont extrêmement courantes, parce qu'elles correspondent aux valeurs standard du secteur électrique, c'est-à-dire une valeur efficace de la tension valant 230 V et une fréquence de 50 Hz.

4. On lit sur le graphique : une période correspond à 4 graduations et le signal en pointillé bleu ($e(t)$) est en avance de une demie graduation sur le signal en rouge ($u(t)$). On en déduit $\varphi_u = -\frac{1}{8}2\pi = -\frac{\pi}{4}$.
5. La tension $\underline{u}$ est donnée par $\underline{u} = R\underline{i}$. Son amplitude est donc $u_m = Ri_m$ et son déphasage par rapport e est $\varphi_u = \varphi_i$. On a ainsi $\frac{L\omega}{R} = -\tan(\varphi_u) = -\tan(\varphi_i) = 1$ et donc $L = \frac{R}{\omega} = \frac{R}{2\pi f}$. A.N. : $L = 7,48 \text{ mH}$.

II - Annulation du déphasage dans un moteur

1. La résistance et la bobine sont en série donc $\underline{Z}_e = R + jL\omega$.

Par définition de l'impédance $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_e}$ soit

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + jL\omega}$$

En partant de l'expression $i = I \cos(\omega t + \varphi)$, on sait $I = |\underline{i}|$ et $\varphi = \arg(\underline{i})$, avec $\underline{i} = \underline{I} e^{j\omega t}$. On a alors

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

2. En partant de l'expression de l'amplitude obtenue à la question précédente, on obtient

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2}$$

A.N. : $L = \frac{1}{2\pi \times 50} \sqrt{\left(\frac{220}{33}\right)^2 - 4^2}$ soit $L = 17 \text{ mH}$.

3. Le déphasage est alors $\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{2\pi Lf}{R}\right)$.

A.N. : $\varphi = -\arctan\left(\frac{2\pi \times 50 \times 17 \cdot 10^{-3}}{4}\right)$ soit $\varphi = -0,93 \text{ rad} = -53^\circ$. Comme $\varphi < 0$, i est en retard sur u .

4. Le condensateur étant monté en parallèle, on a

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_e} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}}$$

5. En notant ψ l'argument de l'impédance Z_{eq} , celle-ci est réelle si $\psi = 0 [\pi]^1$. Soit $\psi = 0$ (u et i sont en phase) ou $\psi = \pi$ (u et i sont en opposition de phase).

Ici, on peut utiliser la forme algébrique de $\frac{1}{Z_{\text{eq}}}$: si Z_{eq} est réel, $\frac{1}{Z_{\text{eq}}}$ l'est également et sa partie imaginaire doit être nulle. Or

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = jC\omega + \frac{R - jL\omega}{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} - j\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + (L\omega)^2} \right)$$

La condition recherchée est donc

$$\boxed{C = \frac{L}{R^2 + (L\omega)^2}}$$

On peut remarquer que, si cette condition est vérifiée, et comme la partie réelle est positive, $\frac{1}{Z_{\text{eq}}}$ est un réel positif. Z_{eq} l'est donc également et u et i sont bien en phase comme demandé dans l'énoncé.

A.N. : $C = \frac{17 \cdot 10^{-3}}{4^2 + (17 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 50)^2}$ soit $C = 0,38 \text{ mF}$.

III - Détermination d'une capacité inconnue

L'exercice n'étant pas guidé par des questions intermédiaires, la première difficulté est d'établir la démarche à suivre. La seule information à notre disposition est le chronogramme de e et s .

Sur celui-ci, on peut lire la période des deux signaux $T = 2 \mu\text{s}$, les amplitudes des deux signaux : $E_m = 4 \text{ V}$ et $S_m = 1,6 \text{ V}$, ainsi que le décalage temporel entre les deux signaux $\Delta t = 0,3 \mu\text{s}$.

On peut alors en déduire la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ soit $\omega = 3,14 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1}$ et le déphasage φ de s par rapport à e : $\left| \frac{\varphi}{2\pi} \right| = \frac{\Delta t}{T}$

On voit sur la figure que s passe par son maximum après e , s est donc en retard sur e et ainsi $\varphi < 0$. Soit $\varphi = -54^\circ = -0,94 \text{ rad}$.

Il faut ensuite faire apparaître ces informations dans la relation entre e et s . On commence par écrire l'impédance équivalente Z_1 à la résistance $2R$ en parallèle avec le condensateur $Z_1 = \frac{2R}{1 + j2RC\omega}$.

La relation entre $\underline{s}$ et $\underline{e}$ est alors obtenue par un pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{Z_1}{R + Z_1} \underline{e} = \frac{2}{3 + 2jRC\omega} \underline{e}$$

On peut ensuite raisonner soit sur le module, soit sur l'argument de cette « fonction de transfert »

□ **Module-Amplitude** : on a

$$\left| \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \right| = \left| \frac{2}{3 + 2jRC\omega} \right| = \frac{2}{\sqrt{9 + 4R^2C^2\omega^2}} \quad \text{et par ailleurs} \quad \left| \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \right| = \frac{S_m}{E_m}$$

soit

$$9 + 4R^2C^2\omega^2 = \frac{4E_m^2}{S_m^2} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{C = \frac{1}{R\omega} \sqrt{\frac{E_m^2}{S_m^2} - \frac{9}{4}}} \quad \text{A.N. : } C = 0,64 \text{ nF}$$

□ **Argument-Déphasage** : on a $\varphi = \arg\left(\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right)$ et donc

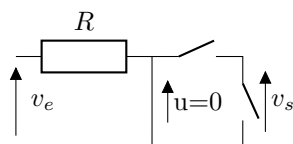
$$\tan \varphi = -\frac{2RC\omega}{3} \quad \text{soit} \quad \boxed{C = -\frac{3 \tan \varphi}{2R\omega}} \quad \text{A.N. : } C = 0,66 \text{ nF}$$

1. Attention à ne pas confondre ψ et φ : on a $\underline{u} = Z_{\text{eq}} \underline{i}$ et donc $\psi = -\varphi$. Ici cela ne modifie cependant pas la condition recherchée $\psi = 0 [\pi] \Leftrightarrow \varphi = 0 [\pi]$

IV - Étude complète d'un filtre

1. Comportements asymptotiques à basse ($\omega \rightarrow 0$) et haute ($\omega \rightarrow +\infty$) fréquence :

Circuit équivalent à basse fréquence

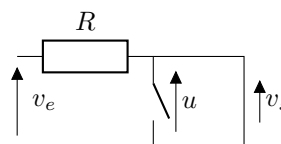


$u = 0$ car la bobine est équivalente à un fil.

Or v_s est une fonction linéaire de u .

On a donc en basse fréquence $v_s \approx 0$.

Circuit équivalent à haute fréquence



Les condensateurs sont équivalents à des fils.

On a donc en haute fréquence $v_s \approx 0$.

Le filtre est donc probablement un filtre passe-bande.

2. — En raison de la présence de la bobine, la résistance et les condensateurs ne sont pas en série.
 — En raison de la présence d'un condensateur entre u et v_s , le second condensateur n'est pas en parallèle avec la bobine.

Le circuit n'est donc ni en série, ni en parallèle et il n'existe pas d'impédance équivalente permettant de s'y ramener, tout en gardant v_s . Il n'y a donc pas de pont entre v_s et v_e .

3. □ Pont diviseur entre v_s et u : on remarque que les 2 condensateurs sont en série, on peut donc écrire

$$\underline{v_s} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_C}} \underline{u} = \frac{1}{2} \underline{u} \quad (1.1)$$

□ Pont diviseur entre u et v_e : R et $(\underline{Z_L} \parallel 2\underline{Z_C})$ sont en série. On a donc : $\underline{u} = \frac{(\underline{Z_L} \parallel 2\underline{Z_C})}{R + (\underline{Z_L} \parallel 2\underline{Z_C})} \underline{v_e}$

$$\text{avec } \underline{Z_L} \parallel 2\underline{Z_C} = \frac{jL\omega \times \frac{2}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{2}{jC\omega}} = \frac{2jL\omega}{2 - LC\omega^2}.$$

$$\text{d'où } \underline{u} = \frac{2jL\omega}{2 - LC\omega^2} \cdot \frac{1}{R + \frac{2jL\omega}{2 - LC\omega^2}} \underline{v_e} \text{ soit}$$

$$\underline{u} = \frac{2jL\omega}{2R + 2jL\omega - RLC\omega^2} \underline{v_e} \quad (1.2)$$

En combinant (1.1) et (1.2), on en déduit $\underline{v_s} = \frac{1}{2} \frac{2jL\omega}{2R + 2jL\omega - RLC\omega^2} \underline{v_e}$.

Finalement

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{2R + 2jL\omega - RLC\omega^2}$$

V - Résonance en tension aux bornes de la bobine

- ω_0 : pulsation propre, en rad s^{-1} ;
— Q : facteur de qualité, sans unité ;
— x : pulsation (ou fréquence) réduite, sans unité.
- Les trois dipôles sont en série, on peut appliquer la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{u_m} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_C} + R} e_m = \frac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R} e_m = \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}} e_m$$

En utilisant les notations de l'énoncé, on retrouve bien

$$\underline{u_m} = \frac{e_m}{1 - \frac{1}{x^2} - j\frac{1}{Qx}}$$

- On sait $u_m = |\underline{u_m}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - \frac{1}{x^2})^2 + (\frac{1}{Qx})^2}}$.

On pose alors $X = x^2$ et $F(X) = \left(1 - \frac{1}{X}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 X}$. u_m est maximum quand $F(X)$ est minimum. On calcule alors la dérivée de F :

$$F'(X) = 2\left(1 - \frac{1}{X}\right)\left(-\frac{1}{X^2}\right) - \frac{1}{Q^2 X^2}$$

Celle-ci s'annule pour

$$F'(X) = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{X}\right)\left(-\frac{1}{X^2}\right) = \frac{1}{Q^2 X^2} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

En revenant à $x = \sqrt{X}$, la résonance a lieu pour $x_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ soit, avec $f = xf_0$,

$$f_r = \frac{f_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Remarque : on retrouve la même condition de résonance que pour la résonance en charge vue en cours : il faut $X > 0$ soit $1 > \frac{1}{2Q^2}$ et donc $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- L'expression de u_m obtenue précédemment donne directement

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_m = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_m = e_m$$

— Pour $Q = 0,3$: il n'y a pas résonance, la courbe $u_m(x)$ est strictement croissante.

— Pour $Q = 3$: il y a résonance en $x_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 9}}} \approx 1$, la courbe $u_m(x)$ est strictement croissante entre $x = 0$ et $x = x_r$ et décroissante ensuite.

On retrouve dans les deux cas des courbes similaires celles vues en cours pour la résonance en charge à la différence notable que la résonance a lieu après la pulsation propre ($\omega_r > \omega_0$).

- En $f = f_0$, $x = 1$ et alors $u_m = \frac{e_m}{1 - 1 - \frac{1}{Q}}$ soit $\underline{u_m} = jQe_m$. u étant un signal sinusoïdal de pulsation ω , on sait $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $u_m = |\underline{u_m}| = Qe_m$ et $\varphi = \arg(\underline{u_m}) = \frac{\pi}{2}$. Finalement

$$u(t) = Qe_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Il y a risque de surtension si $Q \gg 1$.

VI - Sonde atténuatrice d'oscilloscope

1. Pour $f = 0$ (régime statique), $\underline{H}(0) = \frac{R_o}{R_o + R_s}$.
2. On commence par analyser le circuit par blocs : $\forall \omega, \underline{H}(j\omega) = \frac{(\underline{Z}_{C_{s2}} \parallel \underline{Z}_{C_0} \parallel \underline{Z}_{R_o})}{(\underline{Z}_{C_{s1}} \parallel \underline{Z}_{R_s}) + (\underline{Z}_{C_{s2}} \parallel \underline{Z}_{C_0} \parallel \underline{Z}_{R_o})}$. Puis on trouve :

$$\forall \omega, \underline{H}(j\omega) = \frac{R_o}{R_o + R_s} \frac{1 + jR_s C_{s1} \omega}{1 + j \frac{R_o R_s}{R_o + R_s} (C_o + C_{s2} + C_{s1}) \omega}$$

3.

$$\forall \omega, |\underline{H}|(j\omega) = \frac{R_o}{R_o + R_s} \sqrt{\frac{1 + (R_s C_{s1} \omega)^2}{1 + \left(\frac{R_o R_s}{R_o + R_s} (C_o + C_{s2} + C_{s1}) \omega \right)^2}}$$

$$\forall \omega, \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arctan(R_s C_{s1} \omega) - \arctan\left(\frac{R_o R_s}{R_o + R_s} (C_o + C_{s2} + C_{s1}) \omega\right)$$

4. La fonction de transfert est un réel positif pour toute pulsation si $\forall \omega, \arg(\underline{H}(j\omega)) = 0$, donc si :

$$R_s C_{s1} = \frac{R_o R_s}{R_o + R_s} (C_o + C_{s2} + C_{s1})$$

donc

$$R_s C_{s1} = R_o (C_o + C_{s2})$$

L'intérêt est qu'il n'y a pas de déphase entre l'entrée et la sortie puisque $\varphi(V_o) - \varphi(V_e) = \arg(\underline{H}) = 0$. Il n'y a donc aucun décalage temporel entre le signal entrant dans la sonde et le signal sortant de la sonde (et entrant dans l'oscilloscope). La sonde ne modifie donc que l'amplitude du signal et pas sa phase à l'origine : à l'oscilloscope, on observera exactement le signal d'entrée avec une amplitude plus petite.

5. Si la condition précédente est respectée alors

$$\forall \omega, |\underline{H}|(\omega) = \frac{R_o}{R_o + R_s}$$

indépendamment de la fréquence. Il est important que ce résultat ne dépende pas de la fréquence : en effet, un signal périodique quelconque est la superposition d'une infinité de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples entières d'une pulsation fondamentale. Si le module de la transmittance dépendait de la fréquence alors tous les termes de la décomposition de Fourier « verraient » un module différent et serait donc atténués différemment : le signal de sortie serait totalement différent du signal d'entrée. Avec $|\underline{H}|$ indépendant de la fréquence, tous les termes de la décomposition de Fourier sont atténués de la même façon, et le signal de sortie est exactement le signal d'entrée, d'amplitude plus petite.

D'ailleurs, cette remarque est aussi valable pour le résultat en déphasage de la question 4. : puisque le déphasage est nul pour toute fréquence, un signal périodique quelconque ne sera pas non plus décalé temporellement par la sonde.

On rappelle que si on a $V_e(t) = \langle V_e \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} V_{em,n} \cos(n\omega t + \varphi_{e,n})$ alors on a $V_o(t) = |\underline{H}|(0) \langle V_e \rangle +$

$\sum_{n=1}^{\infty} |\underline{H}|(n\omega) V_{em,n} \cos(n\omega t + \varphi_{e,n} + \arg(\underline{H}(jn\omega)))$. Si le module et l'argument de la fonction de transfert sont

indépendants de la fréquence et si l'argument est nul alors, on a : $V_o(t) = |\underline{H}| \langle V_e \rangle + |\underline{H}| \sum_{n=1}^{\infty} V_{em,n} \cos(n\omega t + \varphi_{e,n}) = |\underline{H}| V_e(t)$.

6. Il faut : $R_s = 9R_o = 9\text{ M}\Omega$ et $C_{s1} = \frac{R_o}{R_s} (C_o + C_{s2}) = \frac{1}{9} \times 116\text{ pF} = 13\text{ pF}$.