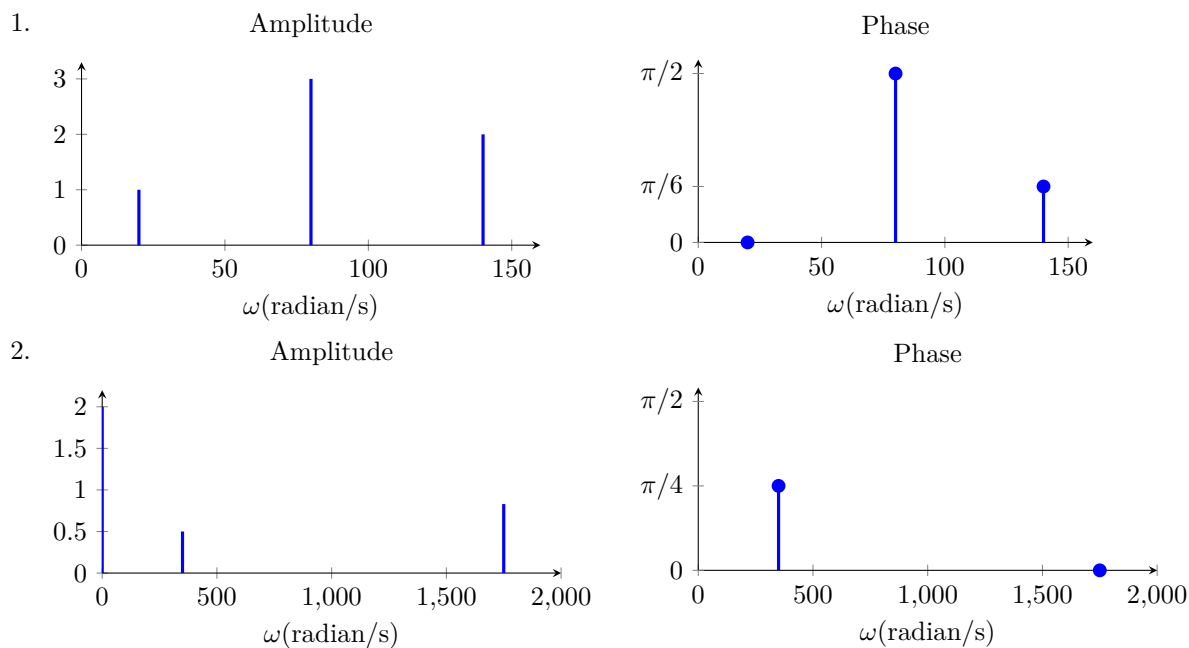


Correction OS – TD 9

Filtrage linéaire

Méthodes, compétences et savoirs-faire

1 - Spectre d'un signal



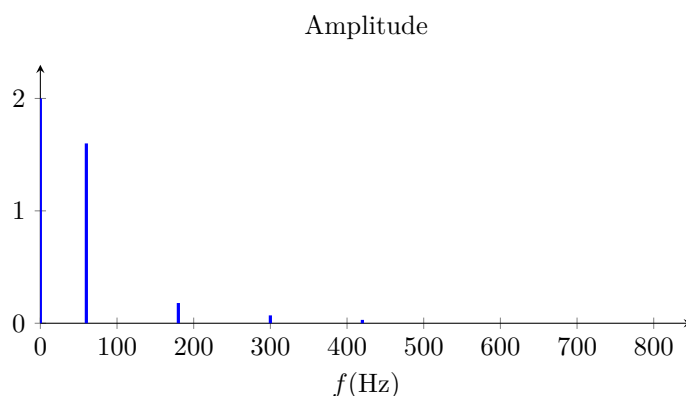
3. $s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ avec $s_0 = \langle s \rangle = 2 \text{ V}$.

Le signal est maximal en $t = 0$, on en déduit que la fonction $s(t)$ est paire et donc $b_n = 0 \forall n$ ou encore

$\varphi_n = 0 \forall n$. On a également $a_{2p} = c_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = c_{2p+1} = \frac{c_1}{(2p+1)^2}$

Par ailleurs $s(t=0) = 4 \text{ V} = s_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{2p+1} = 2 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{c_1}{(2p+1)^2} = 2 + c_1 \frac{\pi^2}{8}$ soit $c_1 = \frac{16}{\pi^2} \approx 1,6 \text{ V}$.

On obtient le spectre d'amplitude suivant :



4. (a) $s(t) = 4 \cos(\omega t + \pi/4) + 3 \cos(2\omega t + 3\pi/4) + \cos(3\omega t)$ avec $f = 3 \text{ kHz}$ et $\omega = 2\pi f$.
 (b) $s(t) = 3 + \cos(\omega t + \pi/4) + 3 \cos(3\omega t + \pi) + 4 \cos(4\omega t)$ avec $f = 2 \text{ kHz}$ et $\omega = 2\pi f$.
 (c) $s(t) = 3 \cos(2\omega t) + 2 \cos(3\omega t + \pi/2) + 2 \cos(5\omega t + 3\pi/4)$ avec $f = 2 \text{ kHz}$ et $\omega = 2\pi f$.

I - Lecture de diagrammes de Bode

- Filtre 1 : filtre passe-haut d'ordre 2 (car pente de +40 dB/décade et $|\Delta\varphi| = \pi$).
 — Filtre 2 : filtre passe-haut d'ordre 2 (car résonance).
 — Filtre 3 : filtre coupe-bande d'ordre 2 (car passe ou coupe-bande d'ordre 1 n'existe pas).
 — Filtre 4 : filtre passe-bas d'ordre 1 (car pente de -20 dB/décade et $|\Delta\varphi| = \pi/2$).
- La fréquence de coupure ou caractéristique est donnée par l'abscisse de l'intersection entre les 2 asymptotes basse et haute fréquence :
 — Filtre 1 : $f_c = 10 \text{ kHz}$.
 — Filtre 2 : $f_c = 100 \text{ Hz}$.
 — Filtre 3 : $f_c = 1 \text{ kHz}$.
 — Filtre 4 : $f_c = 100 \text{ Hz}$.
- Il faut superposer, sur les diagrammes en gain et en phase le spectre du signal d'entrée. Chaque composante harmonique de fréquence f est amplifiée de $G_{dB}(f)$ et déphasée de $\varphi(f)$
 — Filtre 1 : $s(t) = 0 + \frac{E_0}{100} \cos(\omega t + \pi) + \frac{E_0}{\sqrt{10}} \cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2) + \frac{E_0}{1} \cos(100\omega t - \pi/3)$.
 — Filtre 2 : $s(t) = 0 + \frac{E_0}{1} \cos(\omega t + 0, 3) + \frac{E_0}{1} \cos(10\omega t + \pi/4) + \frac{E_0}{1} \cos(100\omega t - \pi/3)$.
 — Filtre 3 : $s(t) = E_0 + 0 + \frac{E_0}{1} \cos(10\omega t + \pi/4) + \frac{E_0}{1} \cos(100\omega t - \pi/3)$.
 — Filtre 4 : $s(t) = E_0 + \frac{E_0}{10} \cos(\omega t - \pi/2) + \frac{E_0}{100} \cos(10\omega t + \pi/4 - \pi/2) + \frac{E_0}{1000} \cos(100\omega t - \pi/3 - \pi/2)$.

II - Fonction de transfert

- On détermine la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, passe bande ou coupe-bande) en étudiant le comportement du filtre à très haute et très basse fréquence. En basse fréquence, on peut remplacer dans le schéma électrique les bobines par des fils et les condensateurs par des interrupteurs ouverts. En haute fréquence, on peut remplacer dans le schéma électrique les bobines par des interrupteurs ouverts et les condensateurs par des fils.
- Pour les 4 filtres, on peut obtenir la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{v_s}{v_e}$ en appliquant un pont diviseur de tension. Il faut au préalable simplifier le circuit en remplaçant 2 des 3 impédances par une impédance équivalente (en série ou en parallèle).
- L'ordre du filtre est donné par la puissance maximale de ω qui intervient dans la fonction de transfert (en général au dénominateur).

(a) Filtre passe-bande d'ordre 2. $\underline{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$.

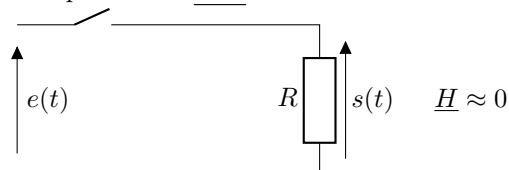
(b) Filtre passe-bas d'ordre 2. $\underline{H} = \frac{R}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$.

(c) Filtre passe-haut d'ordre 1. $\underline{H} = \frac{jR_2C\omega}{1 + j(R_1 + R_2)C\omega}$.

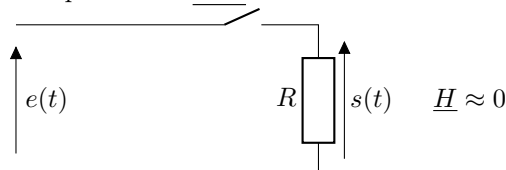
(d) Filtre passe-bas d'ordre 1. $\underline{H} = \frac{R'}{(R + R') + jRR'C\omega}$.

III - Filtre passe-bande d'ordre 2

- Comportement B.F.



- Comportement H.F.



Le filtre se comporte bien comme un passe-bande.

2. — pour $x \ll 1$, $\underline{H}(x) \approx j \frac{H_0 x}{Q}$ donc les asymptotes sont données par $\varphi = \pi/2$ et $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{H_0 \omega}{Q \omega_0} \right)$

soit $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{H_0}{Q \omega_0} \right) + 20 \log(\omega)$

- pour $x \gg 1$, $\underline{H}(x) \approx -j \frac{H_0}{Qx}$ donc les asymptotes sont données par $\varphi = -\pi/2$ et $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{H_0 \omega_0}{Q \omega} \right)$

soit $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{H_0 \omega_0}{Q} \right) - 20 \log(\omega)$

Les asymptotes permettent, *par définition*, de prévoir le comportement asymptotique du filtre, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$ ou $\omega \gg \omega_0$. Mais il ne permet pas de prévoir l'allure du diagramme réel en totalité, comme on peut le voir sur les 3 graphes.

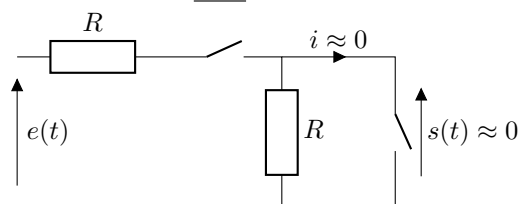
Remarque : les caractéristiques du filtre peuvent être lues d'après le diagramme de Bode :

- l'abscisse de l'interception des deux asymptotes donne ω_0 ;
- le gain en ω_0 donne H_0 : $H(\omega_0) = H_0$ soit $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log(H_0)$;
- l'ordonnée de l'intersection des deux asymptotes donne Q : $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right)$.

3. La bande passante à -3 dB diminue lorsque Q augmente : plus Q est élevé, plus le filtre est sélectif.

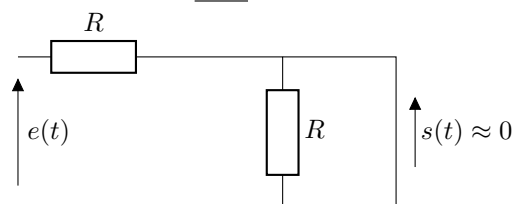
IV - Filtre de Wien

1. Comportement B.F.



$$\underline{H} \approx 0$$

- Comportement H.F.



$$\underline{H} \approx 0$$

Le filtre se comporte comme un passé-bande, donc d'ordre 2.

2. $\underline{H} = \frac{(Z_C \parallel R)}{(Z_C \parallel R) + Z_C + R}$ avec $\underline{Z_C} \parallel R = \frac{R}{1 + jRC\omega}$.

En simplifiant, on obtient l'expression $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$

3. En posant $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$, on trouve

$$\underline{H} = \frac{jx}{1 + 3jx - x^2} = \frac{1}{3 + \frac{1}{jx} + jx} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

En identifiant avec la forme canonique donnée dans l'énoncé, on trouve $H_0 = \frac{1}{3}$ et $Q = \frac{1}{3}$

4. Le gain linéaire est donné par $G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$.

Le gain est maximum quand le dénominateur est minimum donc pour $x = 1$. On a donc $G_{max} = H_0$ soit $G_{dB,max} = 20 \log(H_0) = -20 \log(3) = -9,5 \text{ dB}$

Le déphasage est donné par $\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$.

Pour $x = 1$, on a donc $\varphi = 0$.

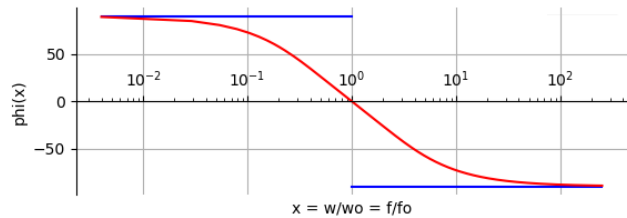
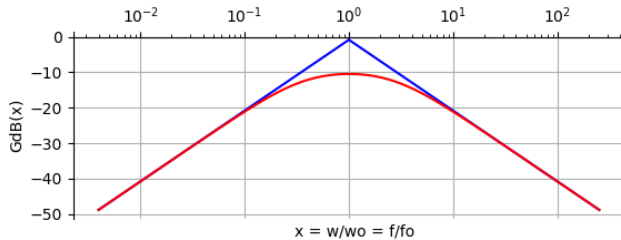
5. — asymptote B.F. : $\underline{H}_{bf} \approx \frac{H_0}{-jQ} = \frac{jH_0 x}{x}$.

Soit $G_{bf} = \frac{H_0 x}{Q}$, $G_{dB,bf} = 20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right) + 20 \log x = 20 \log x$ et $\varphi_{bf} = \frac{\pi}{2}$.

— asymptote H.F. : $\underline{H}_{hf} \approx \frac{H_0}{jQx} = -\frac{jH_0}{Qx}$.

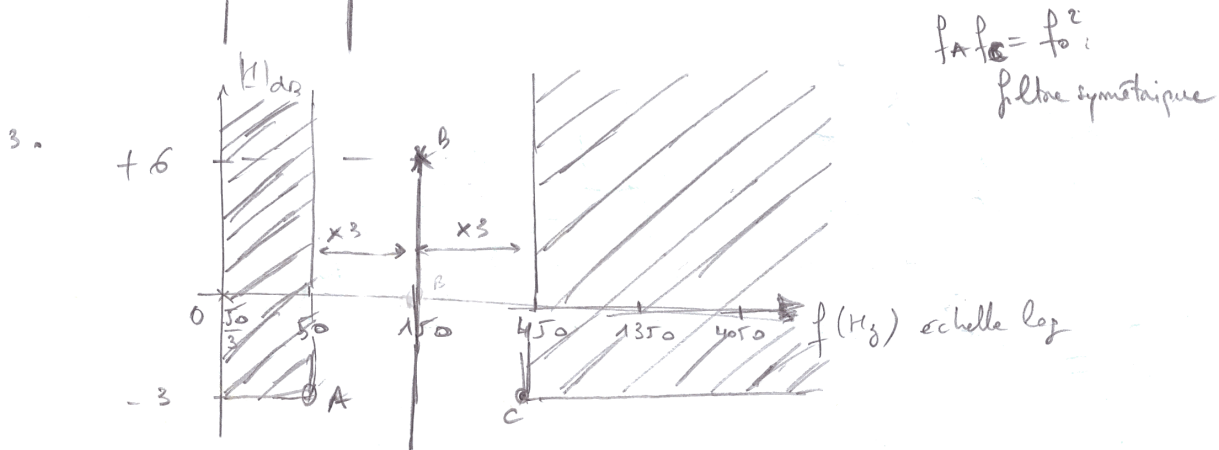
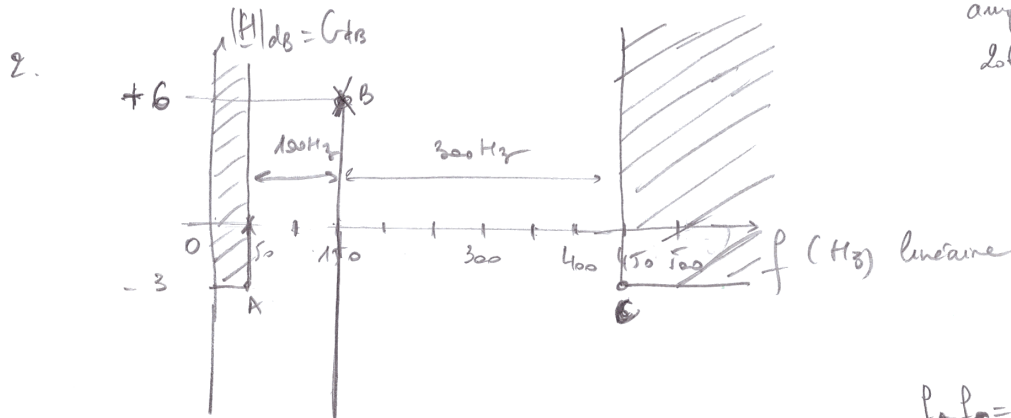
Soit $G_{bf} = \frac{H_0}{Qx}$, $G_{dB,bf} = 20 \log \left(\frac{H_0}{Qx} \right) - 20 \log x = -20 \log x$ et $\varphi_{bf} = -\frac{\pi}{2}$.

— Comme $Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas résonance et le diagramme de Bode réel en gain reste en dessous du diagramme asymptotique. On peut calculer $\underline{H}(x=1) = H_0$ et donc $G(x=1) = H_0 = \frac{1}{3}$, $G_{dB}(x=1) = 20 \log H_0 = -20 \log 3 \approx -10$ et $\varphi(x=1) = 0$.



V - Décomposition de Fourier et filtrage

- On lit en ordonnée du spectre : $\forall n, c_n = b_n$ donc $\forall n, a_n = 0$.
 - On lit, en $f = 0$, que $\langle e \rangle = e_0 = 0,8 \text{ V}$.
 - La composante fondamentale est $f_1 = 50 \text{ Hz}$, avec une amplitude $c_1 = 1,0 \text{ V}$. On détermine alors $\omega = 2\pi f_1 = 314 \text{ rad s}^{-1}$.
 - $\forall n, \sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{c_n} = -1$ donc $\forall n, \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$.
 - $e(t=0) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega \times 0 + \varphi_n) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\varphi_n) = e_0$ car $\forall n, \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$.
 - $\forall t, e(t) = e_0 + b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + b_9 \sin(9\omega t)$ avec $e_0 = 0,8 \text{ V}$, $b_1 = 1 \text{ V}$, $b_3 = 0,3 \text{ V}$ et $b_9 = 0,1 \text{ V}$.



- Première bande de transition, pente minimale :

$$p_1 = \frac{6 - (-3)}{\log(3)} = 18,9 \text{ dB decade}^{-1}$$

Seconde bande de transition, pente maximale :

$$p_2 = \frac{-3-6}{\log(3)} = -18,9 \text{ dB decade}^{-1}$$

5. On propose un filtre passe-bande du deuxième ordre avec comme fréquence centrale $f_0 = 150 \text{ Hz}$. Les contraintes à respecter sont, en notations canoniques :

— en $f_0 = 150 \text{ Hz}$: $|H|(f_0) = |A_0| \geq 2$

— en $f^* = 50 \text{ Hz}$ ou en $f^* = 450 \text{ Hz}$: $G_{\text{dB}}(f^*) \leq -3 \text{ dB}$ d'où $\frac{|A_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f^*}{f_0} - \frac{f_0}{f^*}\right)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc

$$Q \geq \sqrt{\frac{2A_0^2 - 1}{\left(\frac{f^*}{f_0} - \frac{f_0}{f^*}\right)^2}}$$

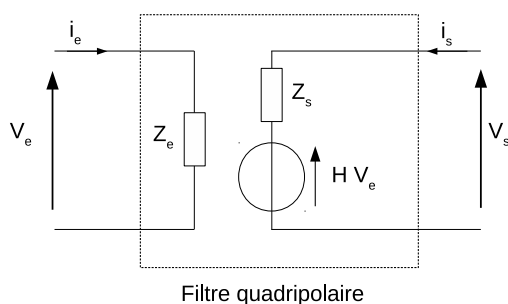
En choisissant $f_0 = 150 \text{ Hz}$, c'est-à-dire au milieu de la bande passante du cahier des charges, on s'assure que $\left(\frac{f^*}{f_0} - \frac{f_0}{f^*}\right)^2$ a la même valeur à 50 Hz qu'à 450 Hz , $\left(\frac{1}{3} - 3\right)^2 = 7,11$. Il n'y a donc qu'une seule et même condition à respecter pour ces deux fréquences.

On remarque aussi que les deux conditions ne sont pas indépendantes : par exemple, le choix de $|A_0|$ contraint le choix de Q . On donne ci-dessous quelques paramétrages possibles :

$$\begin{aligned} |A_0| = 2 &\implies Q \geq 0,992 \\ |A_0| = 4 &\implies Q \geq 2,088 \\ |A_0| = 8 &\implies Q \geq 4,226 \\ |A_0| = 10 &\implies Q \geq 5,290 \end{aligned}$$

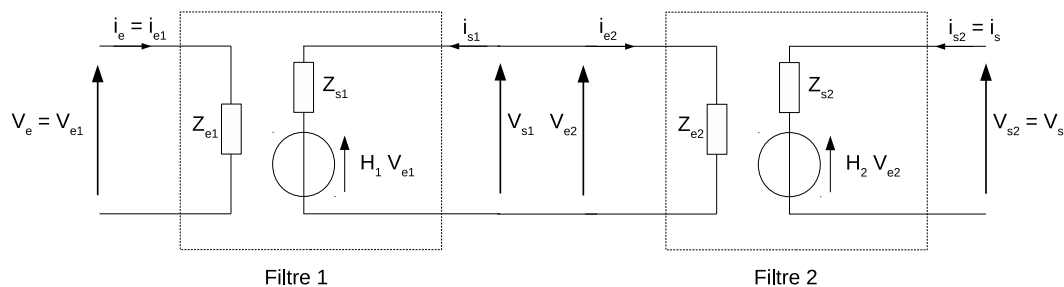
Le premier cas ($|A_0| = 2$) est le cas limite de la première condition, et détermine la plus petite des valeurs possibles pour le facteur de qualité pour pouvoir respecter le cahier des charges.

6. On repart des définitions du cours pour un filtre quadripolaire linéaire. On a le schéma suivant :



avec $\underline{H} \equiv \left(\frac{v_s}{v_e}\right)_{i_s=0}$

Quand on branche successivement deux filtres quadripolaires, on obtient le schéma suivant :



Pour chacun des deux filtres, on a toujours : $\underline{H}_1 \equiv \left(\frac{v_{s1}}{v_{e1}}\right)_{i_{s1}=0}$ et $\underline{H}_2 \equiv \left(\frac{v_{s2}}{v_{e2}}\right)_{i_{s2}=0}$.

Pour fonction de transfert de l'ensemble des deux filtres, on a $\underline{H} \equiv \left(\frac{v_s}{v_e} \right)_{i_s=0} = \left(\frac{v_{s2}}{v_{e1}} \right)_{i_{s2}=0}$.

On remarque également que $v_{s1} = v_{e2}$.

Pour le filtre 2, comme rien n'est branché complètement à droite du circuit, on a $i_s = i_{s2} = 0$ et donc

$$v_s = v_{s2} \equiv \underline{H}_2 v_{e2} = \underline{H}_2 v_{s1} \quad (1.1)$$

Pour le filtre 1, il est évident que $i_{s1} \neq 0$ et on ne peut donc pas écrire $v_{s1} = \underline{H}_1 v_{e1}$. En revanche, tous les dipôles de la maille centrale étant en série, on peut écrire

$$v_{s1} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1 v_{e1} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1 v_e \quad (1.2)$$

Finalement, on a, pour $i_s = 0$

$$v_s = \underline{H}_2 v_{s1} = \underline{H}_2 \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1 v_e$$

d'où

$$\underline{H} \equiv \left(\frac{v_s}{v_e} \right)_{i_s=0} = \underline{H}_2 \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1$$

L'énoncé demande de trouver les conditions sur les impédances d'entrée et de sortie pour qu'on puisse écrire $\underline{H} = \underline{H}_2 \underline{H}_1$. Ceci est obtenu pour $|\underline{Z}_{e2}| \gg |\underline{Z}_{s1}|$. En effet, on a alors $\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1} \approx \underline{Z}_{e2}$ et donc

$\frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \approx 1$, ce qui mène bien au résultat demandé.

Cette condition est la condition générale de transmission des signaux en électrocinétique.

7. Les fonctions de transfert des deux filtres sont donc

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{A_{0B}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{0B}}}$$

pour le filtre passe-bas, et

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{A_{0H} j \frac{\omega}{\omega_{0H}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{0H}}}$$

pour le filtre passe-haut. On a donc

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_2(j\omega) \underline{H}_1(j\omega) = \frac{A_{0H} j \frac{\omega}{\omega_{0H}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{0H}}} \frac{A_{0B}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{0B}}} = \frac{A_{0H} A_{0B} j \frac{\omega}{\omega_{0H}}}{1 + j\omega \left(\frac{1}{\omega_{0H}} + \frac{1}{\omega_{0B}} \right) - \frac{\omega^2}{\omega_{0H} \omega_{0B}}}$$

pour l'ensemble des deux filtres.

On doit identifier cette fonction de transfert à la forme canonique d'un filtre passe-bande

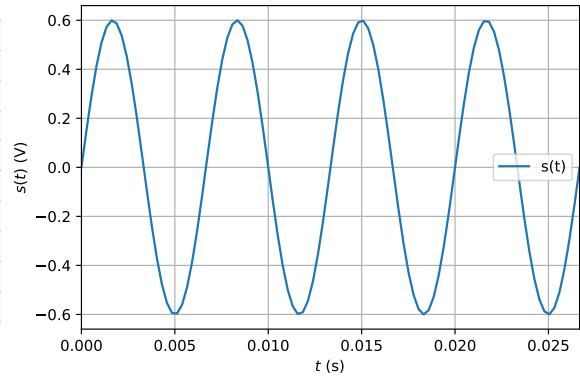
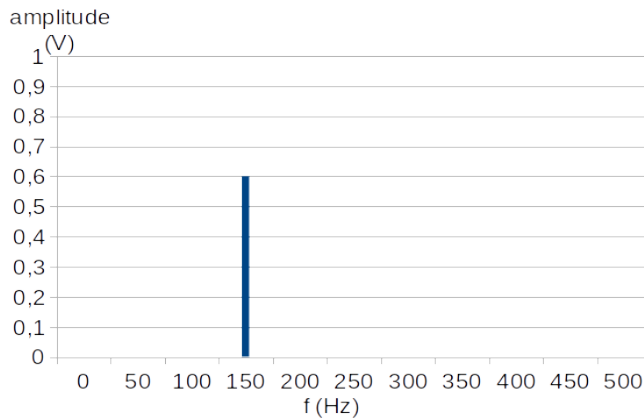
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

ce qui mène à

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\omega_{0H} \omega_{0B}} \\ Q &= \frac{\sqrt{\omega_{0H} \omega_{0B}}}{\omega_{0H} + \omega_{0B}} \\ A_0 &= A_{0H} A_{0B} \frac{\omega_{0B}}{\omega_{0H} + \omega_{0B}} \end{aligned}$$

La plus grande valeur possible du facteur de qualité est obtenue pour $\omega_{0H} = \omega_{0B}$ et on a alors $Q = \frac{1}{2}$. Compte tenu de l'étude menée à la question 5., cette valeur du facteur de qualité est trop faible. Il n'est pas possible de respecter le cahier des charges avec deux filtres d'ordre 1.

8. Exemple de spectre en sortie respectant le cahier des charges et le chronogramme associé :



VI - Étude complète d'un filtre (fin)

Suite du TD 8.

4. On a

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{jL\omega}{2R + 2jL\omega - RLC\omega^2} = \frac{\frac{jL\omega}{2R}}{1 + j\frac{L\omega}{R} - \frac{LC\omega^2}{2}} = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}A_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

5. D'après la forme de sa fonction de transfert et d'après l'étude menée au 1., il s'agit d'un filtre passe-bande d'ordre deux.

6. On identifie les polynômes terme à terme. On trouve : $\frac{A_0}{Q\omega_0} = \frac{L}{2R}$, $\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{L}{R}$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{LC}{2}$. On en déduit :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}}, \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{A_0 = \frac{1}{2}}.$$

7. $\omega_0 = 1,00 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}$; $Q = 3,00$.

8. On écrit le gain :

$$|\underline{H}|(\omega) = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}|A_0|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

En basse fréquence, on a $\omega \ll \omega_0$ ou encore $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$. Dans le polynôme sous la racine, c'est le terme d'ordre le plus bas en $\frac{\omega}{\omega_0}$ qui prédomine, c'est-à-dire $1 : \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \approx 1$. On peut donc écrire en basse fréquence : $|\underline{H}|(\omega) \approx \frac{\omega}{Q\omega_0}|A_0|$. On en déduit une expression asymptotique du gain en basse fréquence :

$$G_{\text{dB}}(\omega) \equiv 20 \log(\underline{H}) \approx 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0} \frac{|A_0|}{Q}\right) = \boxed{20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 20 \log\left(\frac{|A_0|}{Q}\right) = Y_{1,\text{dB}}(\omega)}$$

La pente de cette asymptote s'évalue facilement en dB decade⁻¹ par $p_1 = \frac{Y_{1,\text{dB}}(10\omega) - Y_{1,\text{dB}}(\omega)}{\log \frac{10\omega}{\omega}} = 20 \text{ dB decade}^{-1}$

$$9. \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{\text{dB}}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}|A_0|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}\right) = -\infty.$$

10. En haute fréquence, on a $\omega \gg \omega_0$ ou encore $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$. Dans le polynôme sous la racine, c'est le terme d'ordre le plus élevé en $\frac{\omega}{\omega_0}$ qui prédomine, c'est-à-dire $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 : \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$. On peut donc écrire en haute fréquence : $|\underline{H}|(\omega) \approx \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}|A_0|}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}} = \frac{\omega_0}{Q\omega}|A_0|$. On en déduit une expression asymptotique du gain en haute fréquence :

$$G_{\text{dB}}(\omega) \equiv 20 \log(\underline{H}) \approx 20 \log\left(\frac{\omega_0}{Q\omega}|A_0|\right) = \boxed{-20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 20 \log\left(\frac{|A_0|}{Q}\right) = Y_{2,\text{dB}}(\omega)}$$

La pente de cette asymptote s'évalue facilement en dB decade⁻¹ par $p_2 = \frac{Y_{2,dB}(10\omega) - Y_{2,dB}(\omega)}{\log \frac{10\omega}{\omega}} = -20 \text{ dB decade}^{-1}$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_{dB}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log \left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0} |A_0|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \right) = -\infty.$$

11. On cherche ω^* telle que $Y_{1,dB}(\omega^*) = Y_{2,dB}(\omega^*)$. Compte tenu des expressions trouvées précédemment, cela mène à

$$20 \log \left(\frac{\omega^*}{\omega_0} \right) + 20 \log \left(\frac{|A_0|}{Q} \right) = -20 \log \left(\frac{\omega^*}{\omega_0} \right) + 20 \log \left(\frac{|A_0|}{Q} \right)$$

d'où

$$40 \log \left(\frac{\omega^*}{\omega_0} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^* = \omega_0}$$

À cette pulsation, $Y_{1,dB}(\omega^*) = Y_{2,dB}(\omega^*) = 20 \log \left(\frac{|A_0|}{Q} \right)$.

A.N. : $Y_{1,dB}(\omega^*) = Y_{2,dB}(\omega^*) = 20 \log \left(\frac{1}{2 \times 3,00} \right) = -20 \log(6,00) = -15,6 \text{ dB}$.

12. $G(\omega_0) = |\underline{H}|(\omega_0) = |A_0| = \frac{1}{2} = 0,5$. On peut aussi répondre en décibels :

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log(|\underline{H}|(\omega_0)) = 20 \log(|A_0|) = 20 \log\left(\frac{1}{2}\right) = -6,02 \text{ dB}.$$

13. La bande-passante à -3 dB est l'intervalle de pulsation dans lequel $G_{dB} \geq G_{dB,max} - 3 \text{ dB}$. Il s'agit rigoureusement du même intervalle que celui défini par $G \geq \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ puisque $20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \text{ dB}$.

On commence par réécrire la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$. Sous cette forme,

il est trivial que la maximum de $|\underline{H}|(\omega) = \frac{|A_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ est à la pulsation ω_0 et vaut $|\underline{H}|_{max} = |A_0|$.

On cherche donc les bornes ω_1 et ω_2 de l'intervalle $[\omega_1; \omega_2]$, racines de l'équation :

$$G(\omega) = |\underline{H}|(\omega) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{|A_0|}{\sqrt{2}}$$

c'est-à-dire

$$1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2 \quad \text{d'où} \quad Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$$

puis

$$\omega^2 \mp \frac{\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

On a deux équations du second degré avec un même discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 > 0$, ce qui mène à quatre racines réelles de la forme :

$$\frac{\pm \frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2}$$

Une pulsation est toujours positive, on conserve donc les deux seules racines positives

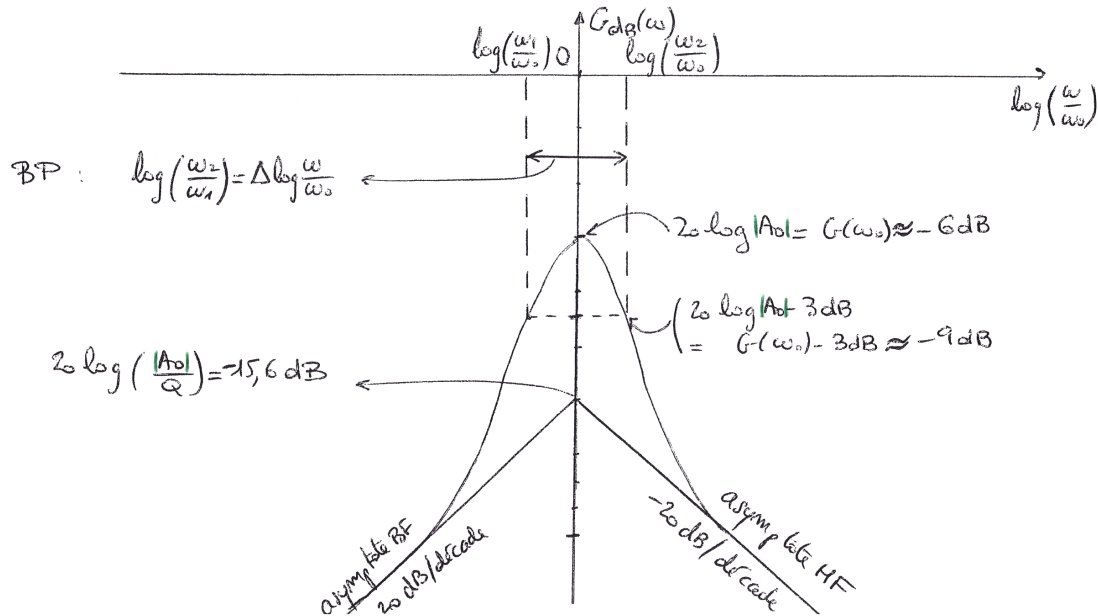
$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2}$$

Finalement :

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{RC}$$

A.N. : $\Delta\omega = \frac{1,00 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}}{3,00} = 333 \text{ rad s}^{-1}$.

14. Diagramme de Bode en gain :

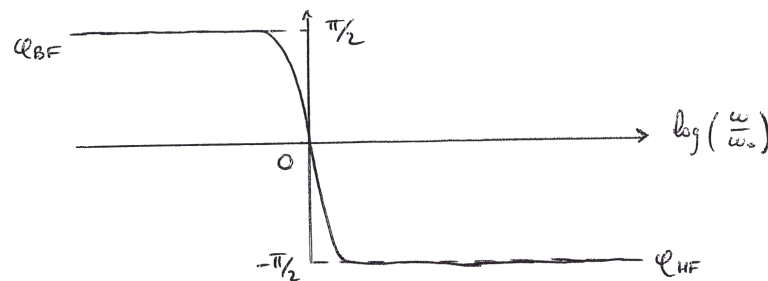


15. $\varphi(\omega) \equiv \arg(\underline{H}(\omega)) = \arg(A_0) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = \arg(A_0) - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right).$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\arg(A_0) - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \right) = \arg(A_0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ car } A_0 = \frac{1}{2} > 0 \text{ donc } \arg(A_0) = 0.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\arg(A_0) - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \right) = \arg(A_0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \text{ car } A_0 = \frac{1}{2} > 0 \text{ donc } \arg(A_0) = 0.$$

$$\varphi(\omega_0) = \arg(A_0) - \arg(1) = \arg(A_0) = 0, \text{ car } A_0 = \frac{1}{2} > 0 \text{ donc } \arg(A_0) = 0.$$



16. $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{10 \cdot 10^5 \text{ rad s}^{-1}}{1,00 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}} = 1,0 \cdot 10^3.$

17. On a $\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \cdot 10^3 \gg 1$, on peut donc approximer le gain par son asymptote : $G_{dB}(\omega) \approx Y_{2,dB}(\omega) = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 20 \log\left(\frac{|A_0|}{Q}\right) = -20 \log(1,0 \cdot 10^3) + 20 \log\left(\frac{1}{2 \times 3,00}\right) = (-60 - 15,6) \text{ dB} = -75,6 \text{ dB}.$

18. $G_{dB}(\omega) = 20 \log\left(\frac{v_{sm}}{v_{em}}\right)$ donc $v_{sm} = v_{em} 10^{\frac{G_{dB}(\omega)}{20}}.$

A.N. : $v_{sm} = 325 \text{ V} \times 10^{-\frac{75,6}{20}} = 325 \text{ V} \times 10^{-3,8} = 325 \text{ V} \times 10^{-5} \times 10^{1,2} = 325 \text{ V} \times 10^{-5} \times (10^{0,3})^4 = 325 \text{ V} \times 10^{-5} \times (2)^4 = 325 \text{ V} \times 10^{-5} \times 16 = 0,05 \text{ V}.$

Remarque : on exploite le fait que $\log(2) \approx 0,3$ donc $10^{0,3} \approx 2.$

19. Pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \cdot 10^3$, on a quasiment $\varphi = -\frac{\pi}{2}.$

20. En basse fréquence, on a $\omega \ll \omega_0$ ou encore $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$, d'où

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0} A_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \approx \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0} A_0}{1}$$

Or

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} \text{ d'où, en basse fréquence : } \frac{v_s}{v_e} \approx j \frac{\omega}{Q\omega_0} A_0$$

et donc

$$\underline{v}_s \approx j \frac{\omega}{Q\omega_0} A_0 \underline{v}_e$$

En revenant dans le domaine temporel, cela se traduit par :

$$v_s(t) \approx \frac{A_0}{Q\omega_0} \frac{dv_e}{dt}$$

En basse fréquence, le filtre réalise donc approximativement la fonction dérivation.

En haute fréquence, on a $\omega \gg \omega_0$ ou encore $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$, d'où

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0} A_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \approx \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0} A_0}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0} A_0}{j^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\frac{A_0\omega_0}{Q}}{j\omega}$$

Or

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} \quad \text{d'où, en haute fréquence :} \quad \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} \approx \frac{A_0\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega} \quad \text{et donc} \quad \underline{v}_s \approx \frac{A_0\omega_0}{Q} \frac{\underline{v}_e}{j\omega}$$

En revenant dans le domaine temporel, cela se traduit par :

$$v_s(t) \approx \frac{A_0\omega_0}{Q} \int v_e dt$$

En haute fréquence, le filtre réalise donc approximativement la fonction intégration (ou primitivation).