OS – TD 9

Filtrage linéaire

Méthodes, compétences et savoirs-faire

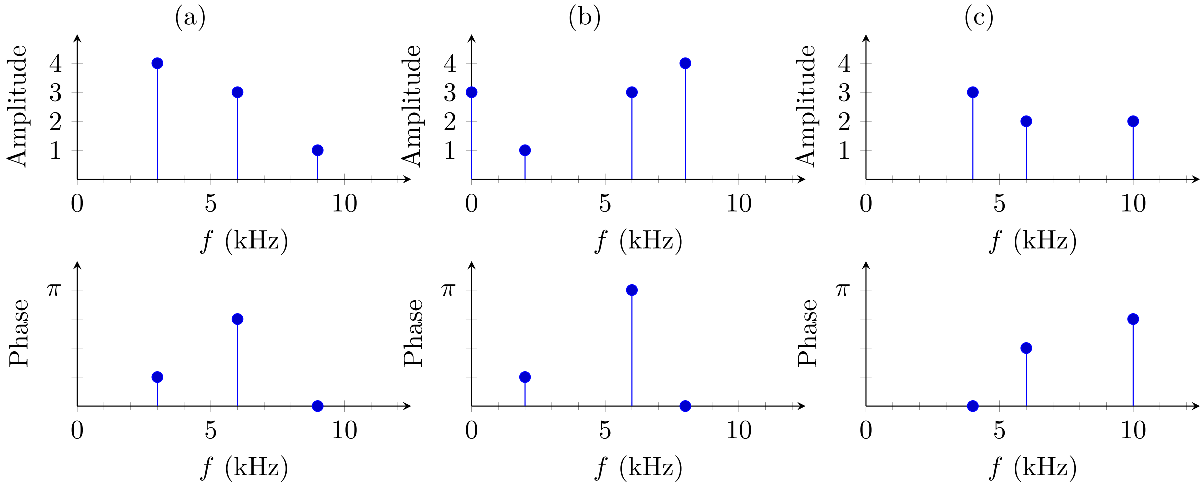
Cahier d'entraînement

Fiche d'entraînement n°7 – Étude des filtres – Exercices 7.7 à 7.16

1 - Spectre d'un signal

Pour les signaux suivants, dessiner les spectre en amplitude et en déphasage :

1. $s(t) = \cos(\omega t) + 3\cos(4\omega t + \pi/2) + 2\cos(7\omega t + \pi/6)$ avec $\omega = 20$ rad/s
2. $s(t) = 2 + \frac{1}{2}\cos(\omega t + \pi/4) + \frac{5}{6}\cos(5\omega t)$ avec $\omega = 350$ rad/s
3. un signal triangle d'amplitude 2 V, de moyenne 2 V et de fréquence 60 Hz et dont la valeur initiale est 4 V [1]
4. Pour les spectres suivants, donner l'expression mathématique du signal et identifier le fondamental :

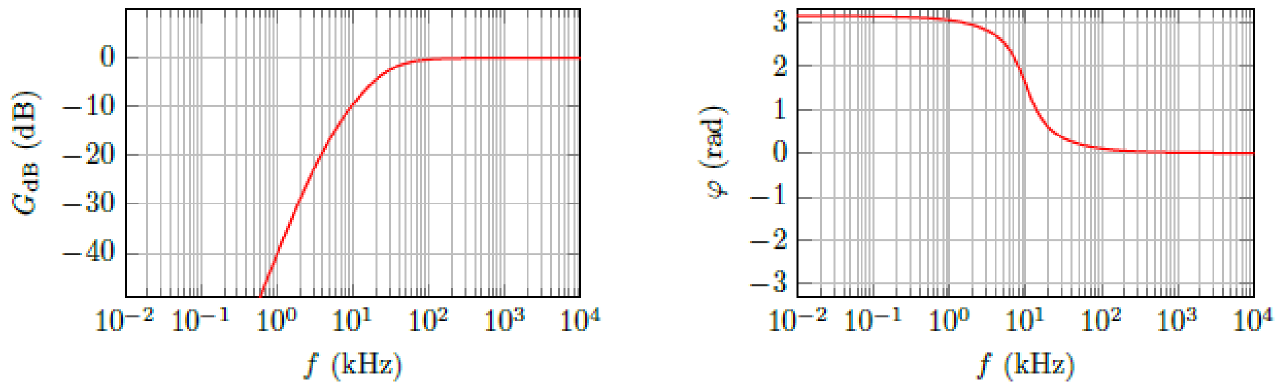


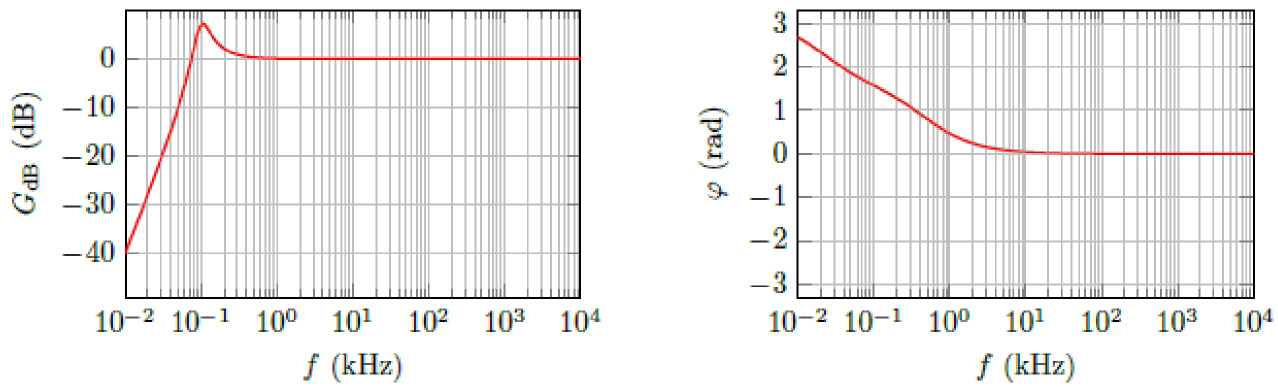
1. Pour un signal triangle, les harmoniques de rang pair ont une amplitude nulle, celles de rang impair décroissent en $\frac{1}{n^2}$. On pourra utiliser la relation suivante : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

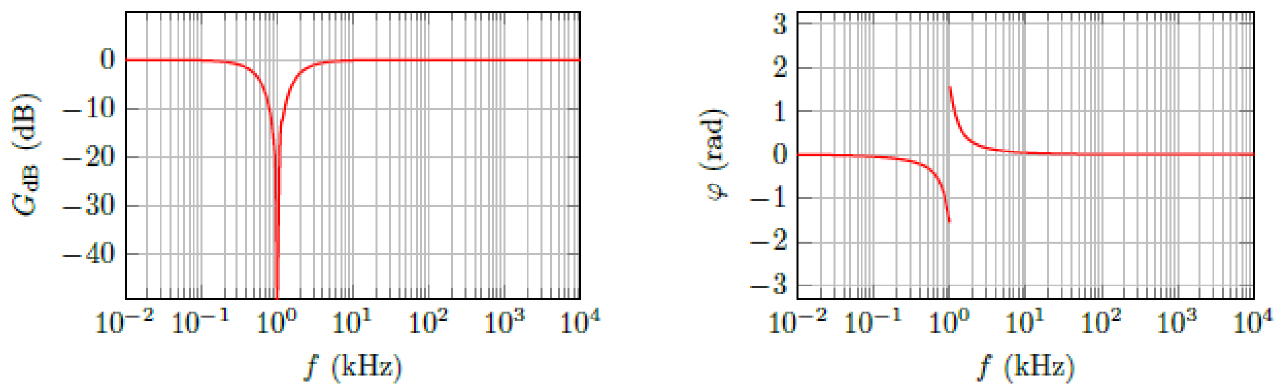
I - Lecture de diagrammes de Bode

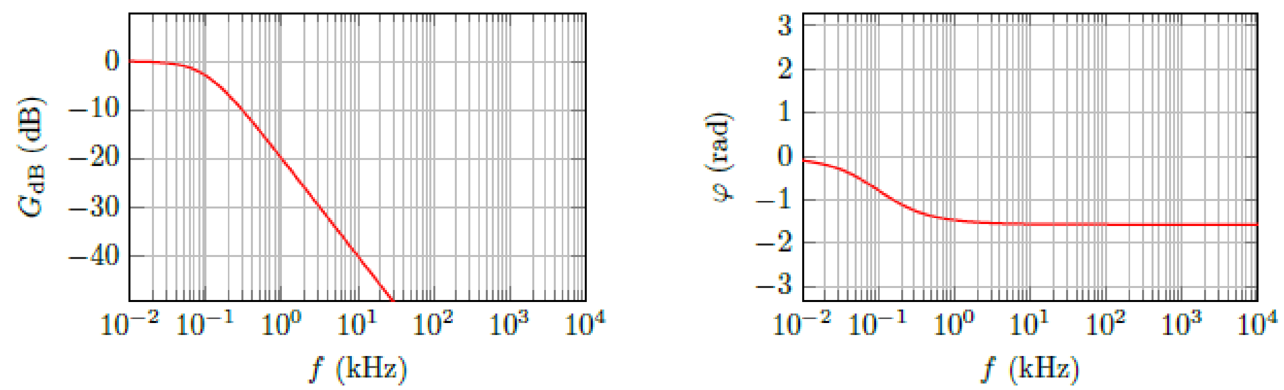
Pour les quatre diagrammes de Bode ci-dessous

1. Indiquer la nature du filtre.
2. Identifier l'ordre du filtre et sa fréquence caractéristique.
3. On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t + \frac{\pi}{4}) + E_0\cos(100\omega t - \frac{\pi}{3})$ où la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ vaut 1 kHz. Déterminer l'expression du signal $s(t)$ en sortie du filtre.





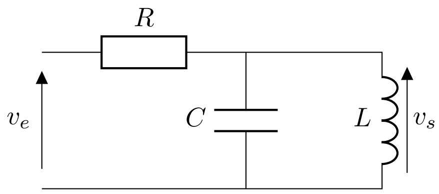


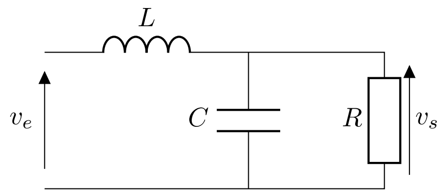


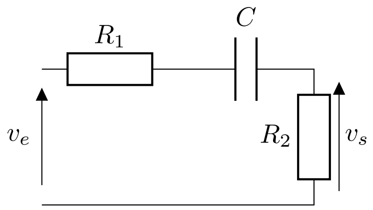
II - Fonction de transfert

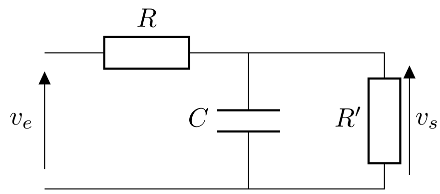
Pour chacun des filtres ci-dessous :

— Déterminer la nature du filtre en utilisant les schémas équivalents à basse et haute fréquance
— Établir sa fonction de transfert
— Déterminer l'ordre du filtre

(a)


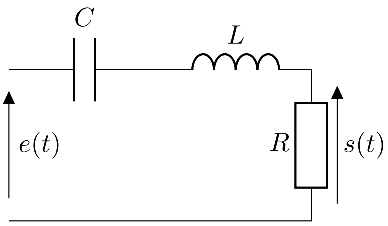
(b)


(c)


(d)


III - Filtre passe-bande d'ordre 2

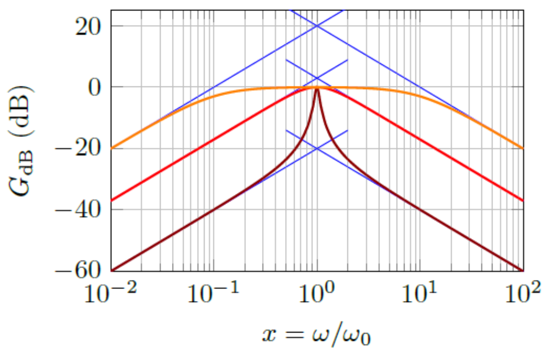
On considère le filtre ci-contre, dont la fonction de transfert s'écrit

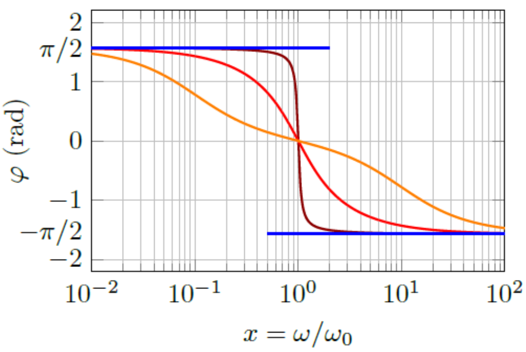


$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{(1 - x^2) + \frac{jx}{Q}}$$

avec $x = {}^{\omega}/_{\omega_0}$ la pulsation réduite, $\omega_0 = {}^{1}/\sqrt{LC}$ la pulsation centrale du filtre et Q son facteur de qualité.

Son diagramme de Bode est donné ci-dessous. La courbe marron (avec résonance) est tracée pour $Q = 10$, la courbe rouge (au plus proche des asymptotes) est tracée pour $Q = {}^{1}/\sqrt{2}$ et la courbe orange (sans résonance et éloignée des asymptotes) est tracée pour $Q = {}^{1}/_{10}$.

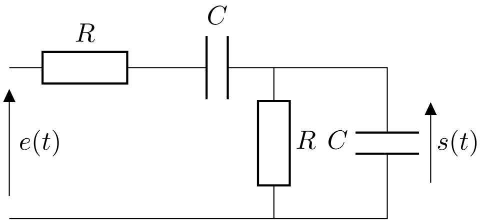




1. Justifier que le montage permet effectivement de réaliser un filtre passe-bande.
2. Retrouver l'équation des asymptotes du diagramme de Bode. Est-ce suffisant pour prévoir complètement l'allure du diagramme ?
3. Commenter l'influence du facteur de qualité sur la bande passante.

IV - Filtre de Wien

On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-contre. Ce type de filtre est notamment utilisé dans des oscillateurs auto-entretenus assez simples à réaliser : vous y reviendrez dans le cours d'électronique de PT.



1. Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.
2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.
3. On pose $\omega_0 = {}^1/_{RC}$ et $x = {}^\omega/_{\omega_0}$. Écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

   en précisant les expressions de H_0 et Q.
4. Calculer simplement le gain maximal du filtre, exprimer sa valeur en dB et calculer le déphasage correspondant.
5. Représenter le diagramme de Bode asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

V - Décomposition de Fourier et filtrage

On considère un signal d'entrée e dépendant de façon périodique du temps, avec une période T. On envisage une décomposition en série de Fourier sous la forme

$$e(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t))$$

Cette décomposition est strictement équivalente à

$$e(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

sous réserve de définir $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{c_n}$ pour $c_n \neq 0$, et $\sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{c_n}$ toujours pour $c_n \neq 0$.
On donne une partie du spectre du signal e à la figure 1.1.

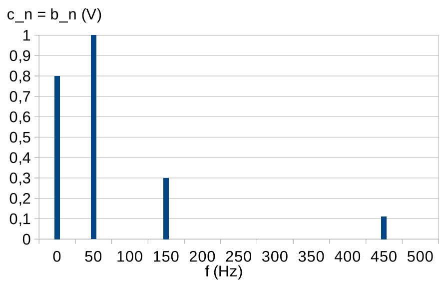


FIGURE 1.1 – Spectre du signal d'entrée. En ordonnée $c_n = b_n$, en volts. En abscisse la fréquence, en hertz.

1. À l'aide exclusivement des informations portées sur la figure et des définitions des décompositions en série de Fourier, déduire le maximum d'informations sur le signal d'entrée (fréquence fondamentale, valeur moyenne, valeur en $t = 0$, déphasages, etc.).

Cahier des charges : on voudrait pouvoir conserver, en sortie d'un filtre, un signal aussi sinusoïdal que possible, de fréquence comprise entre 100 et 500 Hz et d'amplitude maximale. On souhaite également que la fréquence isolée en sortie du filtre ait une amplitude au moins multipliée par 2. Les autres composantes spectrales doivent être atténuées d'au moins 3 dB.

2. Proposer un gabarit en gain en décibel $|H|_{dB}$ du filtre avec en abscisse la fréquence sur une échelle linéaire.
3. Proposer un gabarit en gain en décibel $|H|_{dB}$ du filtre avec en abscisse la fréquence sur une échelle logarithmique.
4. Quelles sont les pentes en dB/décade minimales et maximales acceptables dans les bandes de transition ?
5. Proposer *un* filtre linéaire simple permettant de respecter le cahier des charges. On donnera les contraintes à respecter sur les paramètres canoniques du filtre pour qu'il respecte le cahier des charges. Superposer un des diagrammes de Bode en gain possibles et le gabarit de la question 3.

On essaie de répondre au cahier des charges en utilisant *deux* filtres linéaires simples, un passe-haut et un passe-bas.

6. Comment doit-on choisir les impédances de sortie du premier filtre et d'entrée du deuxième filtre pour que la fonction de transfert de l'ensemble des deux filtres soient égales au produit des fonctions de transfert de chacun des filtres ?
7. En considérant que les impédances sont telles que recherchées à la question précédente, quelle serait la fonction de transfert obtenue avec deux filtres d'ordre 1 ? L'identifier à la forme canonique d'un filtre passe-bande. En déduire qu'on ne peut pas respecter le cahier des charges avec deux filtres d'ordre 1.
8. Proposer un spectre en sortie du filtre respectant le cahier des charges. Représenter une allure temporelle possible du signal en sortie.

VI - Suite de l'exercice III du TD n° 8 – Étude complète d'un filtre ■■■

On considère le circuit de l'exercice III du TD n° 8. Avec les données suivantes : $R = 3{,}00\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 1{,}00\,\mathrm{H}$ et $C = 2{,}00\,\mathrm{\mu F}$.

4. Mettre l'expression de la fonction de transfert sous une forme permettant de l'identifier facilement à la forme canonique suivante :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}A_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{1.1}$$
Avec A_0, Q et ω_0 constantes réelles positives.
Remarque : il est possible de traiter une partie de la suite de cet exercice en supposant connue la forme canonique précédente.
5. Quel est le type de ce filtre, et son ordre ?
6. Déterminer les expressions de A_0, Q et ω_0 en fonction de R, L et C.
7. Calculer les valeurs numériques de ω_0 et Q.
8. Quelle est l'expression en fonction de ω de l'asymptote Y_1 du gain en décibel de ce filtre pour les basses fréquences ? En déduire la pente en dB/décade de l'asymptote.
9. Quelle est la limite du gain en décibel quand la fréquence tend vers zéro ?
10. Mêmes questions pour l'asymptote hautes fréquences, Y_2, sa pente et la limite du gain en décibel lorsque la fréquence tend vers l'infini.
11. Quelle est la pulsation à laquelle se croisent les asymptotes ? Donner également la valeur des asymptotes à cette pulsation. Application numérique.
12. Donner l'expression du gain en ω_0, noté $G(\omega_0)$. Application numérique.
13. Rappeler la signification de la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$. On note sa largeur $\Delta\omega$. **Démontrer** son expression en fonction de ω_0 et Q, puis en fonction de R, L et C. Application numérique.
14. Représenter l'allure du diagramme de Bode en gain, $G_{dB}(\omega) = f(\log(\omega/\omega_0))$. On représentera les asymptotes, la position de la bande passante ainsi que toutes informations utiles à la lecture du graphique.
15. *Déterminer* les différents résultats concernant la phase φ : limites basse et haute fréquence, valeur de la phase à la pulsation ω_0. Représenter l'allure du diagramme de Bode en phase de ce filtre.

On considère maintenant que le signal sinusoïdal en entrée est :

$$v_e(t) = v_{em}\cos(\omega t) \qquad \text{avec } v_{em} = 325\,\mathrm{V} \text{ et } \omega = 2\pi f = 10 \cdot 10^5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

16. En déduire le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$.
17. Quelle est alors la valeur numérique approchée du gain en décibel ?
18. En déduire la valeur numérique approchée de l'amplitude v_{sm} du signal de sortie.
19. Quelle est la valeur approchée de la phase φ ?
20. Quelle est la fonction mathématique approximativement réalisée en basses fréquences ? Et en hautes fréquences ? Dans chaque cas, on justifiera mathématiquement la réponse.

Données : $\log 2 \approx 0,301$; $20\,\log(6) = 15,6$.