Préparation OS – TP 7

Régime transitoire d'un circuit linéaire du premier ordre

II - Acquisition et étude directe du chronogramme

1. On sait que le condensateur sera déchargé à 99 % pour $t_0 = 5\tau$. Comme, pour un circuit RC série, $\tau = rC$, on en déduit $\boxed{r = \frac{t_0}{5C}}$. A.N. : $r = \frac{3\times 60}{5\times 2{,}2\cdot 10^{-3}} = 16{,}4\,\mathrm{k\Omega}$

III - Modélisation linéaire de la décharge du condensateur

On cherche à établir l'expression d'une fonction de E et V_c dont le tracé en fonction du temps soit en théorie une droite, puis à comparer le modèle théorique aux données expérimentales.

1. L'interrupteur étant en position 1, le circuit se réduit à la résistance r et au condensateur C. En combinant la loi des mailles et la loi d'Ohm aux bornes de la résistance, on obtient $v_c - ri = 0$. Comme i est également le courant à travers le condensateur, on a également $i = C\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}$, ce qui mène à

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} + \frac{v_c}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = rC}$$

On écrit directement la solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre **sans second membre** :

$$v_c(t) = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

. Le condensateur étant initialement chargé, on a $v_c(0^-) = E$ et donc, par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $v_c(0^+) = E$. On en déduit $\lambda = E$, ce qui mène à

$$v_c(t) = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pour obtenir une fonction linéaire du temps, on applique le logarithme sur l'expression précédente, soit

$$\ln(v_c) = \ln\left(E\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \ln E - \frac{t}{\tau}$$

ou encore

$$\ln(E) - \ln(v_c) = \frac{t}{\tau}$$

. On pose donc $\boxed{y = \ln(E) - \ln(v_c) = \ln\left(\frac{E}{v_c}\right)}$, le graphe de $y(t)$ est une droite passant par l'origine de pente $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{rC}$.

Annexe : méthode de la tangente

Soit $s(t)$ la réponse d'un système du premier ordre. De façon générale, l'expression de s est

$$s(t) = S_\infty + (S_0 - S_\infty)\; e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où S_0 est la valeur initiale ($s(t=0) = S_0$) et S_∞ la valeur une fois le régime permanent atteint ($\lim_{t\to+\infty} s(t) = S_\infty$).

La dérivée de s est alors

$$\dot{s}(t) = -\frac{S_0 - S_\infty}{\tau}\; e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On prend un instant t_0 quelconque, l'équation de la tangente à s en t_0 est donnée par

$$y = \dot{s}(t_0)(t - t_0) + s(t_0)$$

avec

$$s(t_0) = S_\infty + (S_0 - S_\infty)\; e^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad \text{et} \quad \dot{s}(t_0) = -\frac{S_0 - S_\infty}{\tau}\; e^{-\frac{t_0}{\tau}}$$

Cette tangente coupe l'asymptote correspondant au régime permanent (*ie* $y = S_\infty$) en t_1. On a alors $y(t_1) = S_\infty$ soit

$$S_\infty + (S_0 - S_\infty)\; e^{-\frac{t_0}{\tau}} - \frac{S_0 - S_\infty}{\tau}\; e^{-\frac{t_0}{\tau}}(t_1 - t_0) = S_\infty$$

ou

$$(S_0 - S_\infty)\; e^{-\frac{t_0}{\tau}} \left(1 - \frac{t_1 - t_0}{\tau}\right) = 0$$

Les deux premiers termes étant non nuls, le trosième l'est nécessairement. En notant Δt l'intervalle de temps entre l'instant où la tangente est tracé et l'instant où elle coupe l'aspymptote du régime permanent, $\Delta t = t_1 - t_0$, et l'équation précédente donne $\frac{\Delta t}{\tau} = 1$ soit

$$\boxed{\Delta t = \tau}$$

Il est à remarquer que cette valeur est indépendante des conditions initiales (S_0), du régime permanent atteint ($\S_infty$) et également de l'instant t_0 où l'on trace la tangente.

Par exemple, en prenant 3 instants « initiaux » différents (avec $t_0 = 0$ en orange) :