

Cahier d'entraînement

— en physique-chimie —

Ondes et Signaux

Sommaire

Généralités

☐	fiche 1. Signaux.....	1
--------------------------	-----------------------	---

Optique

☐	fiche 2. Sources lumineuses et lois de Snell-Descartes.....	7
☐	fiche 3. Lentilles.....	11

Électricité

☐	fiche 4. Étude des circuits électriques I.....	19
☐	fiche 5. Étude des circuits électriques II.....	25
☐	fiche 6. Étude des filtres.....	36
☐	fiche 7. Énergie et puissance électriques.....	45

Électromagnétisme

☐	fiche 8. Champ électrique.....	56
☐	fiche 9. Particule dans un champ électromagnétique.....	62
☐	fiche 10. Champ magnétique.....	69
☐	fiche 11. Induction.....	78

Signaux

Prérequis

Fonctions trigonométriques.

Signaux périodiques (fréquence, période, pulsation, longueur d'onde, phase).

Autour des fonctions trigonométriques

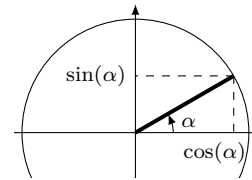


Entraînement 1.1 — Cercle trigonométrique.



Sur le cercle trigonométrique ci-contre, $\cos(\alpha)$ se lit sur l'axe des abscisses et $\sin(\alpha)$ se lit sur l'axe des ordonnées.

Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.



a) $\sin(\alpha + \pi)$

c) $\sin(\alpha + \pi/2)$

b) $\cos(\alpha + \pi/2)$

d) $\sin(\pi/2 - \alpha)$



Entraînement 1.2 — Dérivée de signaux.



Pour chaque signal ci-dessous, calculer sa dérivée par rapport à t .

a) $\sin(2t)$

c) $\cos(t) \times \sin(t)$

b) $\cos^2(t + 4)$



Entraînement 1.3 — Transformer des sommes de signaux en produits.



On rappelle les formules trigonométriques :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b).$$

Mettre les signaux suivants sous la forme $C \cos(\Omega t) \cos(\omega t)$ ou $C \sin(\Omega t) \sin(\omega t)$ (où les constantes C , Ω et ω s'exprimeront en fonction de A , ω_1 et ω_2).

a) $A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$

b) $A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t)$



Entraînement 1.4 — Formules d'addition.

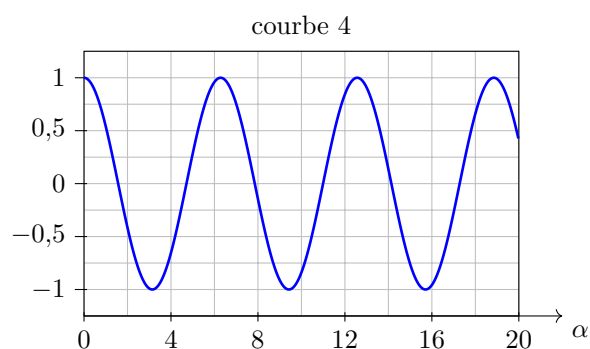
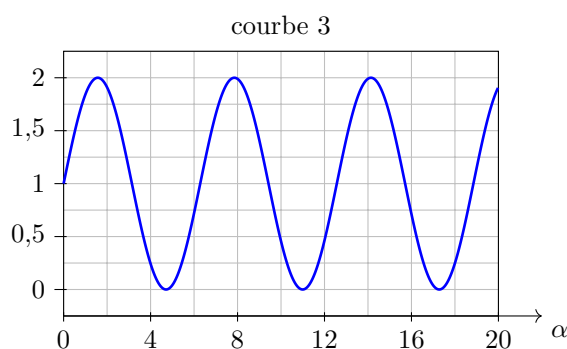
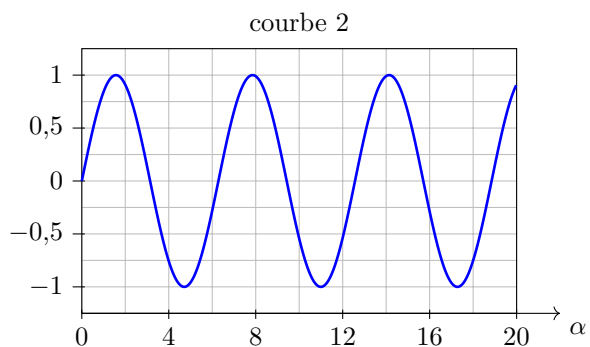
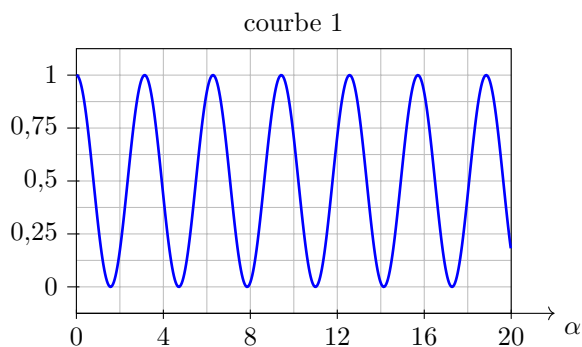


Mettre le signal $A \sin(\omega t + \varphi)$ sous la forme $B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$, où B et C sont des constantes à exprimer en fonction de A et φ .

.....



Entraînement 1.5 — Représentations graphiques.



Pour les quatre graphiques ci-dessus, α est exprimé en radians.

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

a) $\sin(\alpha)$

c) $1 + \sin(\alpha)$

b) $\cos(\alpha)$

d) $\cos^2(\alpha)$

Entraînement 1.6 — Formules trigonométriques.



Le signal $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)$ peut s'écrire sous la forme :

(a) $\cos^2(\omega t + \pi/4)$

(b) $2 \cos(\omega t + \pi/4)$

(c) $\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$

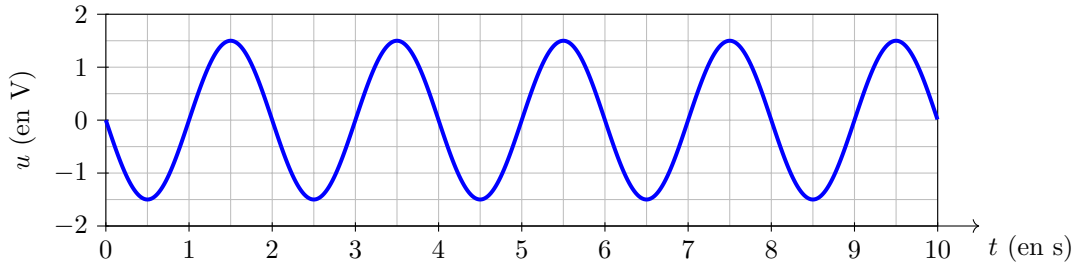
.....

Étude graphique

Entraînement 1.7 — Paramètres d'un signal sinusoïdal.



En travaux pratiques, vous faites l'acquisition d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ et obtenez l'oscillogramme ci-dessous.



Par lecture graphique ou par le calcul, déterminer :

a) l'amplitude U_0

d) la fréquence f

b) la phase à l'origine φ

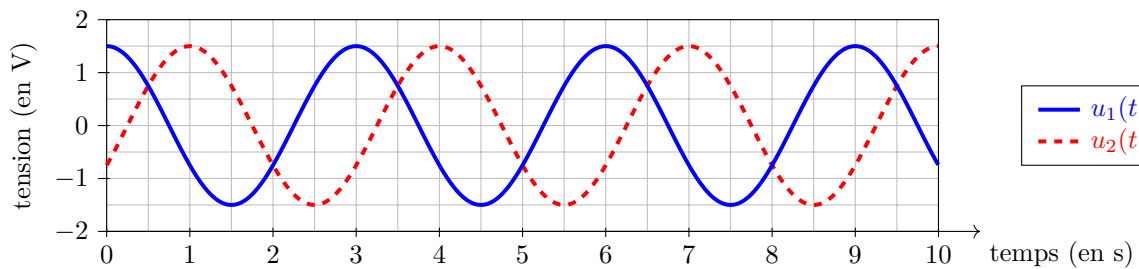
e) la pulsation ω

c) la période T

Entraînement 1.8 — Différence de phase.



La figure ci-dessous donne les représentations graphiques de deux signaux : le signal $u_1(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et le signal $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, où on a $\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



a) Le signal $u_2(t)$ est-il en avance ou en retard sur $u_1(t)$?

b) En déduire le signe de φ

c) Déterminer graphiquement φ

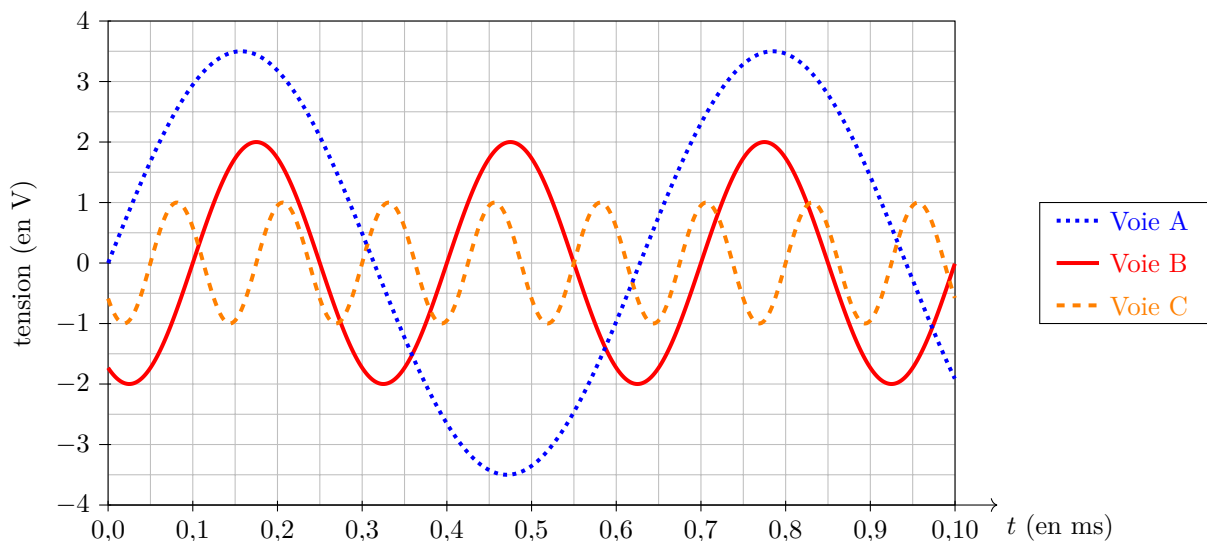
Entraînement 1.9 — Qui est qui ?



En travaux pratiques, vous faites l'acquisition de trois signaux périodiques : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$.

Malheureusement, vous ne vous souvenez pas quelle voie d'acquisition vous avez utilisée pour chaque signal !

Vous savez que la tension $u_1(t)$ a pour période $300 \mu\text{s}$, que la tension $u_2(t)$ a pour fréquence $8,0 \text{ kHz}$ et que la tension $u_3(t)$ a pour pulsation $1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Attribuer chacun des graphes au signal qui lui correspond.

a) Voie A

b) Voie B

c) Voie C

Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne U_{moy} et la valeur efficace U_{eff} d'un signal $u(t)$ périodique de période T sont définies par les formules :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad \text{et} \quad U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt}.$$



Entraînement 1.10 — Signal sinusoïdal.



On considère le signal sinusoïdal $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

a) Calculer la valeur moyenne de $u(t)$

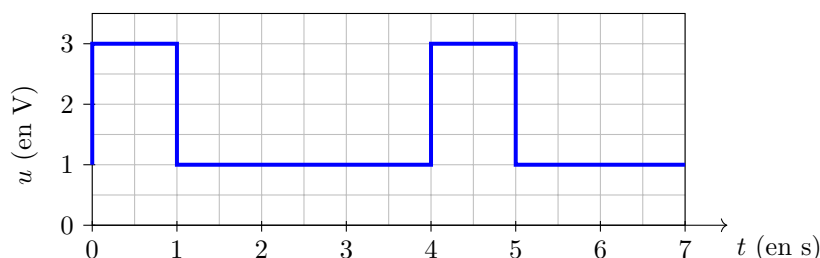
b) Calculer la valeur efficace de $u(t)$



Entraînement 1.11 — Un signal carré.



On considère le signal périodique carré dissymétrique $u(t)$ représenté ci-dessous.



Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$

b) la valeur efficace de $u(t)$



Entraînement 1.12 — Un signal carré, sans son dessin.



On considère le signal périodique carré défini par $u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{si } 0 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{si } T/2 < t \leq T. \end{cases}$

Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$

b) la valeur efficace de $u(t)$

Propagation d'un signal

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants est un signal $s(x, t)$ qui peut se mettre sous la forme

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

où f est une fonction mathématique quelconque. La grandeur c est la célérité de l'onde, c'est-à-dire sa vitesse de propagation.

Entraînement 1.13 — Éclair et tonnerre.



La foudre est une décharge électrique qui se produit pendant les orages et qui entraîne une lumière intense (l'éclair) et un grondement sourd (le tonnerre).

La lumière se propage à la vitesse $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et le son se propage à la vitesse $c_s = 344 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vous mesurez à l'aide d'un chronomètre la durée entre le moment où vous voyez l'éclair et le moment où vous entendez le tonnerre : vous trouvez $\Delta t = 5,0 \pm 0,5 \text{ s}$.

a) On considère que la lumière se propage instantanément entre le lieu de l'éclair et votre position.

Déterminer la distance à laquelle la foudre a frappé

b) En déduire la durée de propagation de la lumière entre l'endroit où la foudre a frappé et votre position.

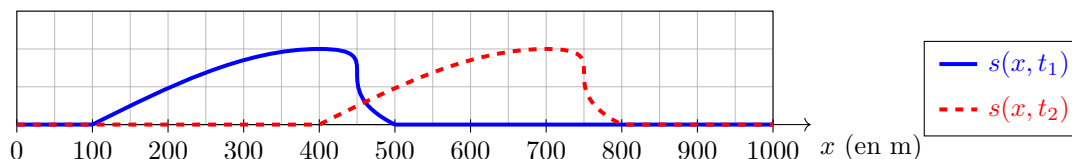
.....

c) L'hypothèse faite à la première question est-elle justifiée?

Entraînement 1.14 — Vitesse de propagation.



Une vague $s(x, t)$ se propage en direction des côtes. Ci-dessous, on représente l'allure de la surface de l'eau aux instants $t_1 = 0$ min et $t_2 = 1$ min.



Déterminer la vitesse de propagation de la vague en km/h.

Entraînement 1.15 — Onde progressive sinusoïdale.



Une onde progressive sinusoïdale a pour expression, en $x = 0$

$$s(0, t) = 2 \sin(3,9t + 0,3\pi),$$

le temps t étant exprimé en secondes.

Elle se propage dans le sens des x croissants à la vitesse $c = 30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la période T du signal.

b) Déterminer la longueur d'onde λ du signal.

c) Donner l'expression générale de $s(x, t)$

Réponses mélangées

©	$5,7 \mu\text{s}$	$-\sin(\alpha)$	$-\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$	En retard	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	48 cm	$\varphi < 0$	oui
	$2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$	$\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$	$\frac{U_0}{2}$	$u_2(t)$	$A \sin(\varphi) \cos(\omega t) + A \cos(\varphi) \sin(\omega t)$			
	0	$\cos(\alpha)$	$1,5 \text{ V}$	$2A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$	$\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$	$u_1(t)$	$2 \cos(2t)$	
	Courbe 1	$-2 \sin(t + 4) \cos(t + 4) = -\sin(2t + 8)$		Courbe 4	$\frac{U_0}{\sqrt{2}}$	$\cos(\alpha)$	2 s	
	$\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$	18 km/h	$2 \sin(3,9t - 13x + 0,3\pi)$	$1,5 \text{ V}$	$\sqrt{3} \text{ V}$	$u_3(t)$		
	$1,7 \text{ km}$	Courbe 3	$-\sin(\alpha)$	$0,5 \text{ Hz}$	Courbe 2	$1,6 \text{ s}$	$\frac{U_0}{\sqrt{2}}$	$\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Sources lumineuses et lois de Snell-Descartes

Prérequis

Lois de Snell-Descartes. Notions de base sur les ondes lumineuses et leur propagation dans un milieu. Notions de base de géométrie concernant les angles.

Constantes utiles

→ célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

→ constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Lois de Snell-Descartes



Entraînement 2.1 — Conversions d'angles.



Soit α_{rad} la mesure d'un angle en radians, α_{deg} sa mesure en degrés et α_{min} sa mesure en minutes d'angle.

a) Exprimer α_{rad} en fonction de α_{deg}

b) Exprimer α_{min} en fonction de α_{deg}



Entraînement 2.2 — Conversions d'angles — bis.



a) $\alpha = 35,65^\circ$. Exprimer α en degrés et en minutes d'angle.

b) $\beta = 98^\circ 15'$. Exprimer β en radians.

c) $\gamma = 1,053 \text{ rad}$. Exprimer γ en degrés et en minutes d'angle.



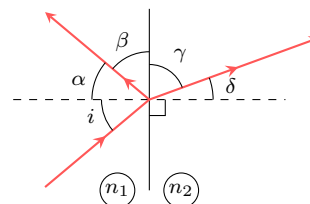
Entraînement 2.3 — Un rayon incident sur un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2 .

Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre.

Tous les angles figurant sur le schéma sont non orientés.



Exprimer chacun des angles suivants en fonction de i et/ou de n_1 et n_2 (en radians) :

a) α

c) δ

b) β

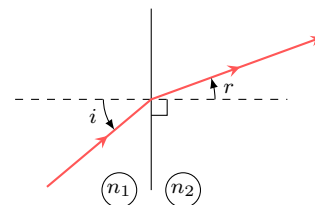
d) γ

Entraînement 2.4 — Un autre rayon incident sur un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2 . Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre alors que le rayon réfracté fait un angle r .

On donne $n_1 = 1,00$ et $n_2 = 1,45$.



a) Pour $i = 24,0^\circ$, que vaut r en degré?

b) Pour $i = 6,74 \times 10^{-1}$ rad, que vaut r en degré?

c) Pour $r = 15,0^\circ$, que vaut i en degré?

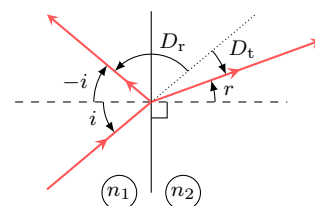
Entraînement 2.5 — Déviation introduite par un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2 .

Les angles définis sur le schéma ci-contre sont tous orientés.

On définit D_r la déviation entre le rayon incident et le rayon réfléchi, et D_t la déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté.



a) Exprimer D_t en fonction de i et r

b) Déterminer D_r



Entraînement 2.6 — Un peu de géométrie dans un prisme.

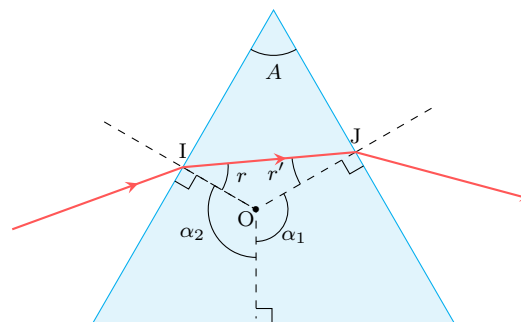


On considère un prisme d'angle au sommet A , représenté ci-contre suivant une de ses faces triangulaires.

Un rayon incident en I sur une face du prisme émerge en J .

On définit les angles α_1 , α_2 , r et r' sur le schéma.

Dans cet entraînement, les angles ne sont pas orientés.



On rappelle que la somme des angles dans un quadrilatère est égale à 2π .

a) Exprimer l'angle A en fonction de α_1 et α_2

b) Exprimer l'angle A en fonction de r et de r'

Autour des réflexions totales

Entraînement 2.7



On considère un dioptre séparant deux milieux d'indices respectifs $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1,3$. Un rayon lumineux arrive sur ce dioptre en formant un angle i par rapport à sa normale.

On rappelle qu'il y a réflexion totale si $\frac{n_1}{n_2} \sin(i) > 1$.

a) Pour $i = 44^\circ$, y a-t-il réflexion totale?

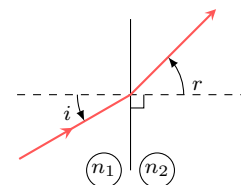
b) Donner, en degrés, l'angle i_ℓ tel qu'il y a réflexion totale si $i > i_\ell$

Entraînement 2.8



On considère un rayon lumineux incident sur le dioptre n_1/n_2 , faisant un angle i avec la normale à ce dioptre et le rayon réfracté un angle r .

On donne $n_1 = 1,37$ et on rappelle qu'il y a réflexion totale si $\frac{n_1}{n_2} \sin(i) > 1$.



a) Pour $i = 20,0^\circ$ et $r = 22,0^\circ$, que vaut n_2 ?

b) Pour $i = 60,0^\circ$, quelle est la valeur maximale de n_2 donnant lieu à une réflexion totale? ...

c) On suppose que $i = 40,0^\circ$. Peut-on observer un phénomène de réflexion totale?



Entraînement 2.9 — Condition de propagation dans une fibre optique.



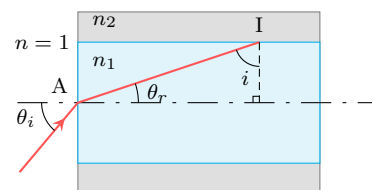
Un rayon lumineux arrive sur un dioptre séparant l'air d'un milieu d'indice n_1 au point A (voir schéma ci-contre). On a donc :

$$\sin(\theta_i) = n_1 \sin(\theta_r). \quad (1)$$

Le rayon se propagera dans la fibre à condition qu'il y ait réflexion totale au point I situé à l'intersection du rayon lumineux et du dioptre n_1/n_2 (avec $n_1 > n_2$).

On donne la relation correspondante :

$$\frac{n_1 \sin(i)}{n_2} > 1 \quad (2)$$



a) À l'aide de (1), exprimer $\cos(\theta_r)$ en fonction de n_1 et de $\sin(\theta_i)$

b) À quelle condition portant sur $\cos(\theta_r)$ équivaut (2)?

c) En déduire à quelle condition sur $\sin(\theta_i)$ équivaut (2).

Sources lumineuses

Entraînement 2.10 — Propagation de la lumière.



Un laser vert émet une radiation lumineuse de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$. Calculer :

a) La fréquence de l'onde

b) L'énergie d'un photon

Entraînement 2.11



Une radiation lumineuse de longueur d'onde λ_0 passe du vide vers un milieu transparent d'indice n .

Quelles quantités sont inchangées ?

(a) La longueur d'onde

(c) La vitesse de propagation

(b) L'énergie d'un photon

(d) La fréquence de l'onde

.....

Entraînement 2.12 — Propagation dans un milieu.



Un laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ se propage dans de l'eau, assimilée à un milieu transparent d'indice optique $n = 1,33$.

Donner la valeur numérique dans l'eau de :

a) La vitesse de la lumière.

b) La longueur d'onde.

Réponses mélangées

564 THz	$(\alpha_1 + \alpha_2) - \pi$	i	1,18	(b) et (d)	$\frac{\pi}{2} - i$	$r - i$
$\pi - 2i$	$3,74 \times 10^{-19} \text{ J}$	$\sin(\theta_i) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$	25,5°	1,25	60°	
60°20'	400 nm	35°39'	$2,26 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$r + r'$	22,0°	
$60 \times \alpha_{\text{deg}}$	Non	$\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(i)\right)$	Non		
1,715 rad	$\cos(\theta_r) > \frac{n_2}{n_1}$	$\frac{\pi}{180} \times \alpha_{\text{deg}}$	$\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(i)\right)$	16,3°		

Lentilles

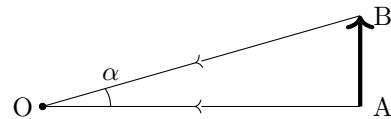
Prérequis

Propriétés des lentilles minces dans les conditions de Gauss. Vergence.
Relations de conjugaison des lentilles minces.

Grandeurs algébriques

Entraînement 3.1 — Diamètre apparent.

On considère le schéma suivant, montrant l'angle α , appelé diamètre apparent, sous lequel est vu un objet AB depuis un point O.



a) Exprimer le diamètre apparent α , en radians, en fonction de OA et AB

b) Exprimer le diamètre apparent α , en degrés, en fonction de OA et AB

Un observateur situé à la surface de la Terre observe des astres, caractérisés par les données suivantes :

	Soleil	Lune
Diamètre	$1,4 \cdot 10^6$ km	$3,5 \cdot 10^3$ km
Distance à la Terre	$150\,600 \cdot 10^3$ km	$384\,400$ km

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser que, quand α est un angle petit et exprimé en radians, on dispose de l'approximation des petits angles : $\alpha \approx \tan(\alpha)$.

c) Calculer le diamètre apparent de la Lune α_L en degrés

d) Calculer le diamètre apparent du Soleil α_S en degrés

e) Que vérifient les valeurs numériques α_S et α_L ?

(a) $\alpha_S > \alpha_L$

(b) $\alpha_S \approx \alpha_L$

(c) $\alpha_S < \alpha_L$

.....

f) Quel phénomène astronomique la comparaison de α_L et α_S permet d'expliquer ?

(a) Les éclipses

(b) Les saisons

(c) Les marées

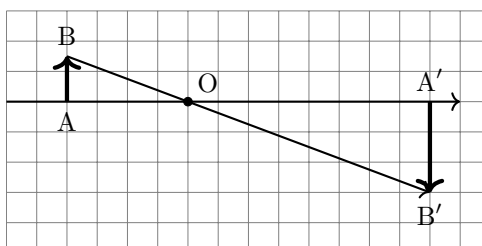
.....



Entraînement 3.2 — Configuration de Thalès et grandissement.



On considère la situation représentée sur le schéma ci-dessous.



On note $\overline{x}$ la valeur algébrique de la longueur x et on définit le grandissement γ par la relation :

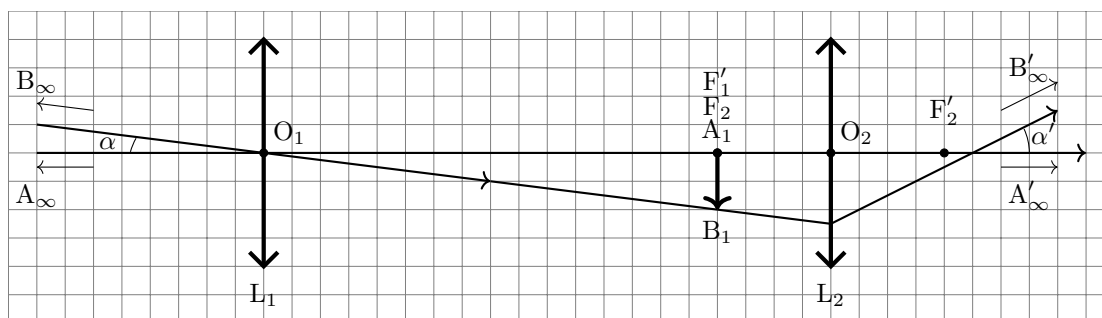
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

a) Donner la relation reliant $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$

b) Déterminer la valeur numérique de γ



Entraînement 3.3 — Schéma optique d'une lunette astronomique afocale.



Le schéma ci-dessus modélise une lunette astronomique afocale, où un carreau correspond à une longueur réelle de 2,5 cm.

Calculer les distances algébriques suivantes :

a) $\overline{O_1F'_1}$

b) $\overline{O_2F_2}$

c) $\overline{O_2O_1}$

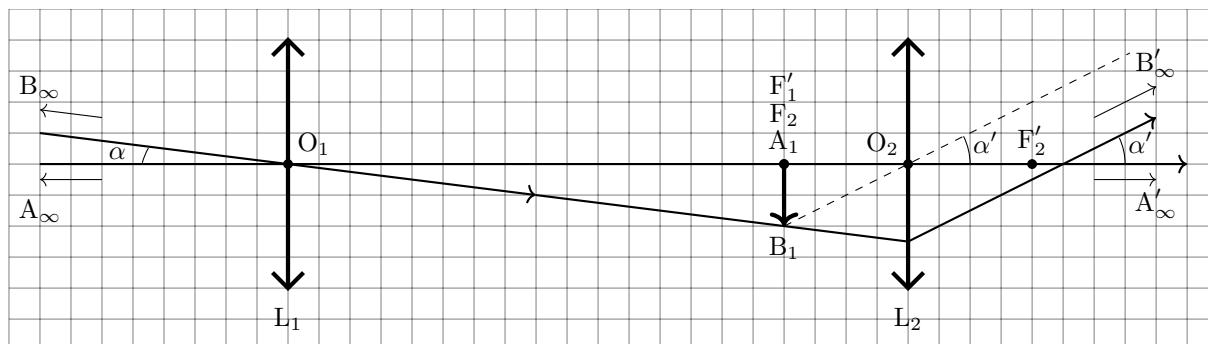
d) $\overline{A_1F'_2}$

Entraînement 3.4 — Grossissement d'une lunette astronomique afocale.



On considère la lunette astronomique afocale schématisée dans l'entraînement précédent.

Elle est constituée d'un objectif (lentille convergente L_1) et d'un oculaire (lentille convergente L_2) alignés sur le même axe optique.



On introduit les grandeurs suivantes :

- la distance focale image de l'objectif, notée f'_1
- la distance focale image de l'oculaire, notée f'_2
- l'objet lointain observé par la lunette, noté $\overline{A_\infty B_\infty}$
- l'image intermédiaire de l'objet par l'objectif, notée $\overline{A_1 B_1}$
- l'image à l'infini de l'image intermédiaire par l'oculaire, notée $\overline{A'_\infty B'_\infty}$
- le diamètre apparent α de l'objet
- le diamètre apparent α' de l'image

On définit le grossissement de la lunette, noté G , comme le rapport du diamètre apparent de l'objet observé à la lunette sur le diamètre apparent réel de l'objet.

Autrement dit, on pose

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Dans cet entraînement, les angles ne seront pas orientés et on travaillera avec des longueurs plutôt que des valeurs algébriques.

a) Exprimer α en fonction de $A_1 B_1$ et d'une distance focale.

.....

b) Exprimer α' en fonction de $A_1 B_1$ et d'une distance focale.

.....

c) Exprimer G en fonction de f'_1 et de f'_2 .

.....

d) Déterminer la valeur de G .

.....

Modèle de la lentille mince

Entraînement 3.5 — Conditions de Gauss.



Parmi les situations suivantes concernant les rayons lumineux issus d'un objet et traversant une lentille mince, indiquer celle qui ne permet pas de se placer dans les conditions de Gauss.

- (a) peu inclinés par rapport à l'axe optique. (b) passant par les bords de la lentille. (c) passant près du centre optique.

.....

☐

Entraînement 3.6 — Déviation de rayons lumineux.

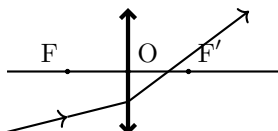


On rappelle les propriétés suivantes :

- Un rayon passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié.
- Un rayon incident dont la direction passe par le foyer objet émerge parallèle à l'axe optique principal.
- Un rayon parallèle à l'axe optique principal émerge avec une direction passant par le foyer image.

Pour chacun des schémas suivants, préciser s'ils sont corrects ou incorrects.

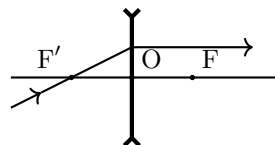
a)



.....

☐

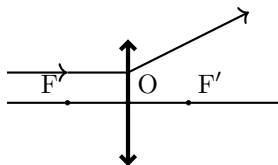
c)



.....

☐

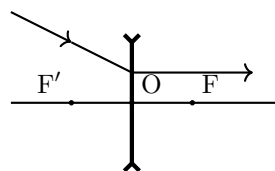
b)



.....

☐

d)



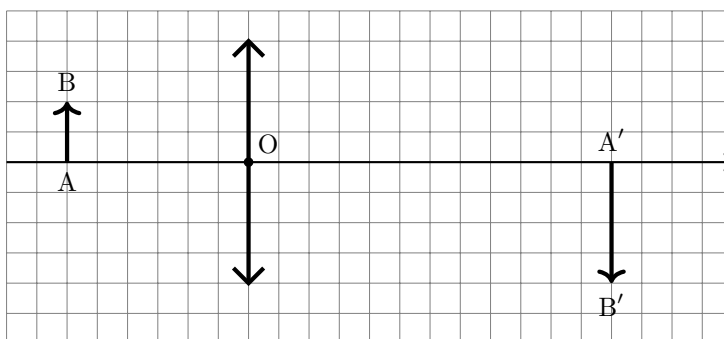
.....

☐

Entraînement 3.7 — Construction de rayons lumineux.



On considère le schéma suivant montrant un objet $\overline{AB}$ et son image $\overline{A'B'}$ par une lentille convergente.



On donne l'échelle du schéma : 8 carreaux sur le schéma correspondent à 10 cm en réalité.

a) Déterminer graphiquement la distance focale de la lentille

b) Calculer la vergence de la lentille

Entraînement 3.8 — Batailles de convergence.



Quelle est la lentille la plus convergente ?

(a) une lentille de vergence $+8,0 \delta$

(c) une lentille de focale objet $-10,0 \text{ cm}$

(b) une lentille de focale image $+8,0 \text{ cm}$

(d) une lentille de focale image $-8,0 \text{ cm}$

.....

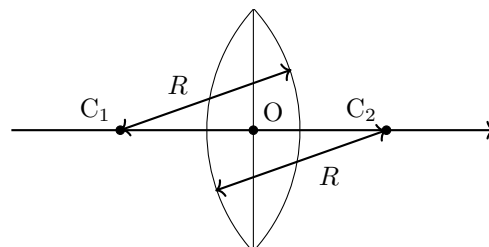
Entraînement 3.9 — Focale d'une lentille biconvexe.



La distance focale d'une lentille biconvexe symétrique de rayon de courbure R , taillée dans un matériau d'indice n et utilisée dans l'air est donnée par la relation suivante :

$$f' = \frac{R}{2(n - n_{\text{air}})}$$

où n_{air} est l'indice optique de l'air.



On souhaite fabriquer une lentille biconvexe de vergence $6,0 \delta$ afin de corriger une hypermétropie forte à partir d'un plastique organique d'indice $n = 1,67$. On donne $n_{\text{air}} = 1,00$.

a) Calculer le rayon de courbure à réaliser

b) Pour quelle valeur de l'indice n la lentille ne dévie pas les rayons lumineux ?

(a) $n \approx n_{\text{air}}$

(b) $n = \frac{3}{2}n_{\text{air}}$

(c) $n = \frac{R}{n_{\text{air}}}$

.....

Conjugaison par une lentille mince

Entraînement 3.10 — Relation de conjugaison au centre optique.



Un objet lumineux est placé au point A, à 15,0 cm devant une lentille mince convergente de centre optique O et de distance focale $f' = 4,0$ cm.

On rappelle la relation de conjugaison aux sommets de Descartes qui permet de faire le lien entre la position $\overline{OA}$ de l'objet et la position $\overline{OA'}$ de l'image :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}.$$

a) Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$ et f'

b) Exprimer $\overline{OA}$ en fonction de $\overline{OA'}$ et f'

c) Exprimer f' en fonction de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$

d) L'image est-elle située avant ou après le centre optique O ?

Entraînement 3.11 — Relation de conjugaison aux foyers.



Dans un dispositif optique convergent de distance focale $f' = 12,0$ cm, on souhaite qu'une image réelle se trouve exactement à 5,0 mm après le foyer image. On cherche la position où l'on doit placer l'objet, dans un premier temps par rapport au foyer objet F, puis par rapport au centre optique O.

On rappelle la relation de conjugaison aux foyers de Newton :

$$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2.$$

a) Exprimer $\overline{FA}$ en fonction de f' et $\overline{F'A'}$

b) Exprimer $\overline{OA}$ en fonction de $\overline{FA}$ et f'

c) Cet objet est-il réel ou virtuel ?

Entraînement 3.12 — Grandissement.



Un système optique donne d'un objet, une image dont le grandissement est le suivant : $\gamma = -2,0$.

a) Par rapport à l'objet, cette image est :

b) Par rapport à l'objet, cette image est :

(a) rétrécie

(b) agrandie

(a) droite

(b) renversée

.....

.....

Entraînement 3.13 — Projecteur de cinéma.



Un projecteur de cinéma contient une lentille convergente de distance focale $f' = 50,0$ mm.

L'écran se situe à 15,0 m de la lentille et on dispose d'une pellicule dont les vignettes sont de dimensions 36,0 mm $\times$ 24,0 mm.

a) À quelle distance algébrique de la lentille doit-on placer la pellicule ?

b) Quelles sont les dimensions de l'image d'une vignette sur l'écran ?

Entraînement 3.14 — Objets et images à l'infini.



a) Un objet lumineux très éloigné, comme une étoile, peut être considéré comme étant situé à l'infini.

Où se situe l'image d'un tel objet par une lentille ?

- (a) dans son plan focal image
- (b) dans son plan focal objet
- (c) à l'infini

.....

b) Un œil « normal » (emmétrope) n'accomode pas lorsqu'il observe une image à l'infini. Dans ce but, on souhaite projeter à l'infini, l'image d'un objet en utilisant une lentille.

Où doit-on placer l'objet ?

- (a) dans son plan focal image
- (b) dans son plan focal objet
- (c) à l'infini

.....

Entraînement 3.15 — Loupe.



Une loupe est une lentille convergente utilisée dans des conditions particulières. Dans cet exercice, la lentille utilisée a une distance focale de 10,0 cm. On place un objet $\overline{AB} = 2,0$ cm à une distance de 6,0 cm en avant de la loupe.

a) Calculer la position de l'image formée par la loupe

b) Donner la nature de l'image

c) Calculer la taille de l'image formée par la loupe

d) Cette image est-elle droite ou renversée ?

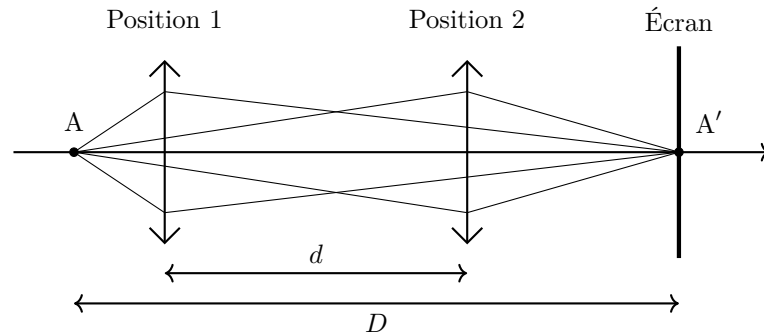


Entraînement 3.16 — Méthode de Bessel.



Pour mesurer la distance focale d'une lentille, on peut utiliser la méthode de Bessel.

On considère un objet donné, et on fixe la distance D entre l'objet et l'écran. On s'assure que D soit suffisamment grande pour qu'il existe deux positions où intercaler la lentille entre l'objet et l'écran, pour lesquelles l'image sur l'écran soit nette. On note d la distance entre ces deux positions.



On peut alors montrer la relation suivante :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\frac{D+d}{2}} - \frac{1}{\frac{-(D-d)}{2}}.$$

a) Exprimer f' en fonction de D et d

b) Exprimer f' lorsque $d = \frac{D}{4}$

c) Exprimer d lorsque $f' = \frac{D}{4}$

Réponses mélangées

(b)	$\frac{-f'^2}{F'A'}$	Correct	$\overline{FA} - f'$	$\frac{15D}{64}$	$\frac{D^2 - d^2}{4D}$	$\overline{OA'} = -15 \text{ cm}$
5,0 cm	(b)	après	(b)	0,52°	(b)	$\frac{\overline{OA} \times \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}} \arctan\left(\frac{AB}{OA}\right) \times \frac{180}{\pi}$
10,8 m × 7,2 m	0	20 cm	(a)	Incorrect	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{AB}$	$\frac{\overline{OA'} \times f'}{f' - \overline{OA'}}$
(a)	-50 cm	40 cm	Incorrect	$\frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$	$\arctan\left(\frac{AB}{OA}\right)$	$\frac{A_1B_1}{f'_1}$
droite	(b)	(b)	$\frac{f'_1}{f'_2}$	virtuelle	$\frac{A_1B_1}{f'_2}$	(a) 0,22 m -2
4	réel	0,53°	-10 cm	$\overline{OA} = -5,02 \text{ cm}$	5,0 cm	+20 δ Correct

Étude des circuits électriques I

Prérequis

Lois des nœuds. Loi des mailles. Loi d'Ohm. Montages diviseurs.

Constantes utiles

→ nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

→ charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Autour du courant électrique



Entraînement 4.1 — Une bataille de courants.



Lequel de ces trois courants électriques présente la plus forte intensité ?

(a) 5 000 électrons durant 1 ms

(c) 20 milliards d'électrons durant 1 min

(b) 0,2 mol d'électrons durant 1 an

.....



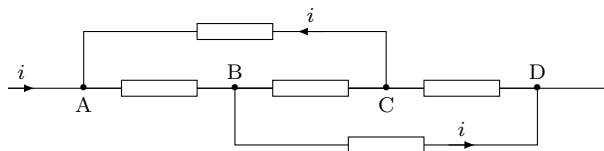
Entraînement 4.2



L'intensité du courant traversant un fil de cuivre vaut $I = 4,0 \text{ mA}$.

Combien d'électrons traversent la section du fil pendant 10 s ?

Entraînement 4.3 — Loi des nœuds.



Les courants indiqués sur le schéma ci-dessus sont algébriques.

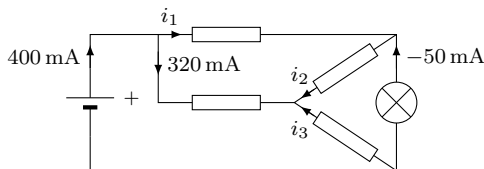
En utilisant la loi des nœuds, déterminer en fonction de i les courants suivants (on note i_{AB} le courant qui va de A vers B, etc) :

a) i_{AB}

b) i_{BC}

c) i_{CD}

Entraînement 4.4 — Loi des nœuds *bis*.



On considère le circuit électrique représenté ci-dessus.

À partir de la loi des nœuds, calculer l'intensité des courants sans utiliser la calculatrice.

- a) i_1 b) i_2 c) i_3

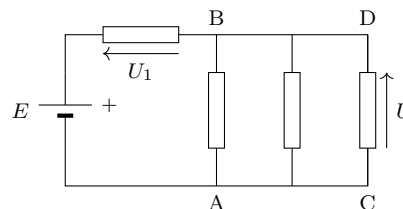
Autour de la tension électrique

Entraînement 4.5 — Loi des mailles.



Un circuit électrique est formé d'une pile de f.é.m E et de quatre dipôles. Certaines tensions sont indiquées.

À partir de la loi des mailles, exprimer en fonction de E et U_1 les tensions suivantes :



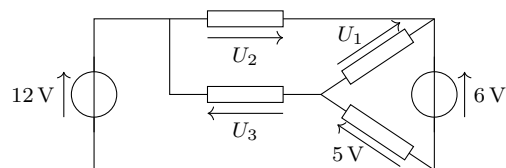
- a) U
- b) $U_{AB} = V(A) - V(B)$
- c) U_{DA}

Entraînement 4.6 — Calculer une tension.



On considère le circuit électrique formé de deux sources idéales de tension et de quatre dipôles, comme représenté ci-contre.

À partir de la loi des mailles, calculer les tensions :



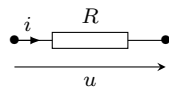
- a) U_1
- b) U_2
- c) U_3

Loi d'Ohm

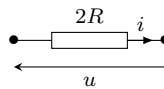
Entraînement 4.7 — Caractéristiques.



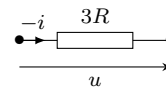
On considère les cas suivants :



Résistance 1



Résistance 2



Résistance 3

Dans chaque cas, exprimer i en fonction de u et R .

a) Résistance 1

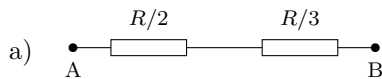
b) Résistance 2

c) Résistance 3

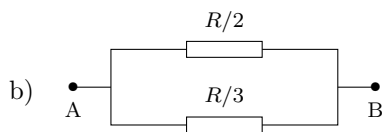
Entraînement 4.8 — Résistances associées.



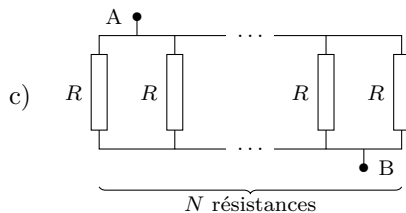
Exprimer la résistance équivalente des dipôles AB suivants :



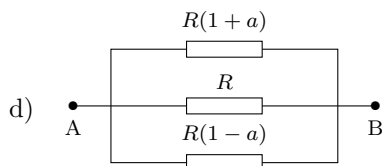
.....



.....

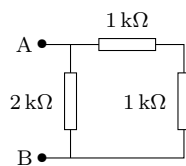


.....

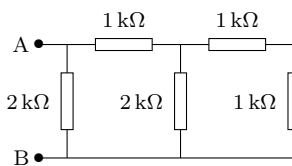


.....

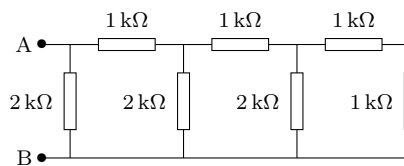
Entraînement 4.9 — Trois résistances équivalentes.



dipôle 1



dipôle 2



dipôle 3

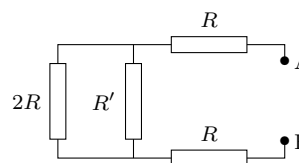
Sans utiliser la calculatrice, calculer la résistance équivalente

- a) du dipôle 1 b) du dipôle 2 c) du dipôle 3

Entraînement 4.10 — Une autre résistance équivalente.



On considère le dipôle AB constitué uniquement de conducteurs ohmiques.



Exprimer la résistance équivalente du dipôle AB en fonction de R et R'



Entraînement 4.11 — Quelle résistance choisir ?



La résistance équivalente d'un dipôle s'écrit

$$R_{\text{eq}} = \frac{4R(R + R')}{2R + R'}.$$

Déterminer la valeur de R' pour que

- a) $R_{\text{eq}} = 3R$ b) $R_{\text{eq}} = \frac{8}{3}R$ c) $R_{\text{eq}} = 2R$

Résoudre une équation électrique



Entraînement 4.12 — Une équation de maille.



Dans un circuit, la loi des mailles se traduit par la relation $R_1 I + R_2(I_0 + I) = 2R_2 I_0$.

- a) On suppose que $R_1 = 2R_2$. Exprimer I en fonction de I_0

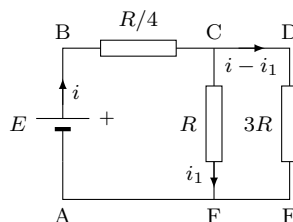
- b) Exprimer I en fonction de R_1 , R_2 et I_0

Entraînement 4.13 — Circuit à 2 mailles.



On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les courants algébriques i et i_1 comme indiqué ci-contre.

Exprimer E en fonction de i , i_1 et R en appliquant la loi des mailles dans la maille :



a) (ABCF)

b) (ABDE)



Entraînement 4.14



Dans l'entraînement précédent, les grandeurs i et i_1 vérifient le système
$$\begin{cases} Ri + 4Ri_1 = 4E \\ 13Ri - 12Ri_1 = 4E \end{cases}$$

a) Déterminer i en fonction de E et R

b) Déterminer i_1 en fonction de E et R

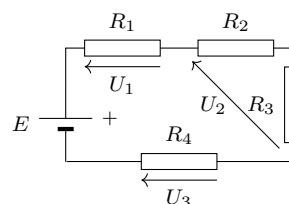
Diviseurs

Entraînement 4.15 — Un diviseur de tension.



On forme un circuit avec une pile de f.é.m E et quatre conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 , U_2 et U_3 comme indiqué ci-contre.

Exprimer en fonction de E , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 , les tensions :

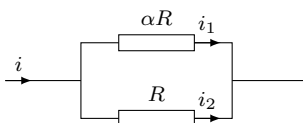


a) U_1

b) U_2

c) U_3

Entraînement 4.16 — Un diviseur de courant.



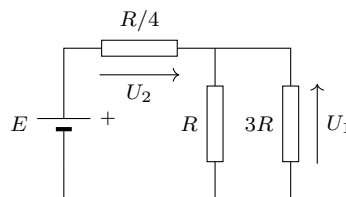
a) Pour quelle valeur de α , a-t-on $i_1 = i/3$?

b) Pour quelle valeur de α , a-t-on $i_2 = 3i_1$?

Entraînement 4.17 — Exercice de synthèse I.



On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 et U_2 comme indiqué ci-contre.

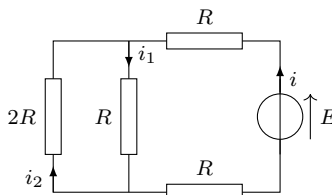


a) Calculer la résistance équivalente aux deux conducteurs ohmiques en parallèle.

b) À l'aide de la formule du diviseur de tension, exprimer U_1 en fonction de E et R

c) Faire la même chose pour U_2

Entraînement 4.18 — Exercice de synthèse II.



a) Après avoir simplifié le circuit, calculer i en fonction de E et R

b) En déduire i_1 à partir de la formule du diviseur de courant

c) En déduire i_2

Réponses mélangées

$\frac{13}{4}Ri - 3Ri_1$	$\frac{3}{4}E$	$2R$	$R\left(\frac{1-a^2}{3-a^2}\right)$	$1\text{ k}\Omega$	1 V	$\frac{4R(R+R')}{2R+R'}$	80 mA
$\frac{3E}{4R}$	30 mA	$\frac{u}{2R}$	$\frac{E-U_1}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	$\frac{ER_1}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	$\frac{E}{4R}$	$\frac{3}{4}R$	2
$\frac{R}{N}$	-350 mA	$\frac{-ER_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	$\frac{E}{R}$	$\textcircled{b}$	3	0	$E-U_1$
$2,5 \cdot 10^{17}$	$\frac{3E}{8R}$	7 V	$2i$	$\frac{5}{R}$	$\frac{E(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$	$1\text{ k}\Omega$	$-\frac{u}{R}$
$\frac{R_2}{R_1+R_2}I_0$	$\frac{u}{3R}$	0	$-\frac{E}{4}$	$\frac{5}{6}R$	$\frac{1}{4}Ri + Ri_1$	R	-6 V
							$U_1 - E$
							$\frac{I_0}{3}$

Étude des circuits électriques II

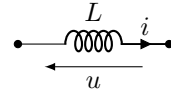
Prérequis

La fiche **Étude des circuits électriques I** et les équations différentielles.

Bobines

En convention récepteur, l'inductance L d'une bobine vérifie l'équation différentielle

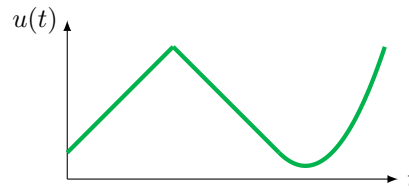
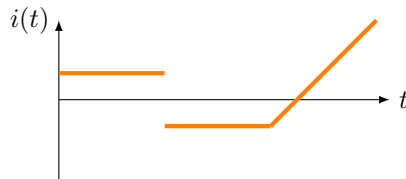
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$



Entraînement 5.1 — Bobine ou pas ?



On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme une bobine ?

(a) oui

(b) non

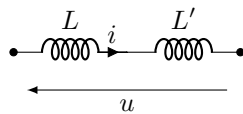
.....



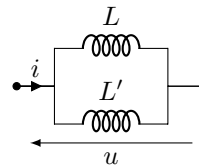
Entraînement 5.2 — Inductances équivalentes.



On considère deux bobines d'inductance L et L' regroupées dans les montages suivants :



montage (a)



montage (b)

a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)

b) En déduire l'inductance équivalente du montage (a)

c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)

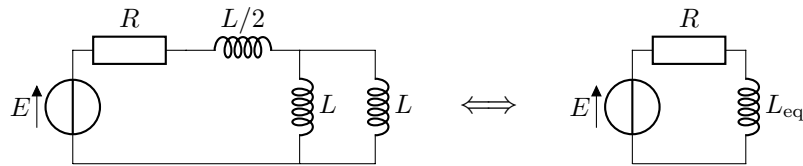
d) En déduire l'inductance équivalente du montage (b)



Entraînement 5.3 — Simplifions !



On souhaite remplacer les bobines par un dipôle équivalent.

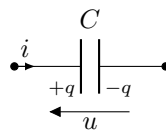


Déterminer L_{eq}

Condensateurs

En convention récepteur, la capacité C d'un condensateur vérifie l'équation différentielle

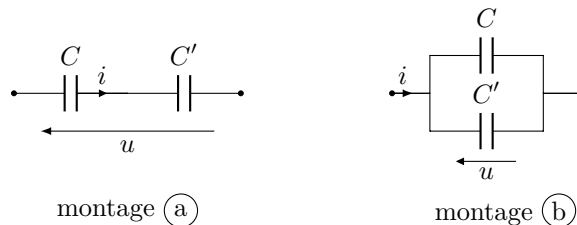
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$



Entraînement 5.4 — Condensateurs équivalents.



On considère deux condensateurs de capacité C et C' regroupés dans les montages suivants :



a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)

b) En déduire la capacité équivalente du montage (a)

c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)

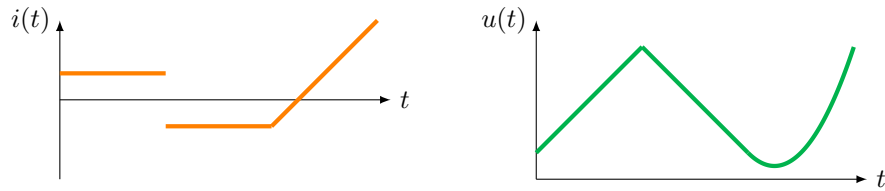
d) En déduire la capacité équivalente du montage (b)



Entraînement 5.5 — Condensateur ou pas ?



On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme un condensateur ?

(a) oui

(b) non

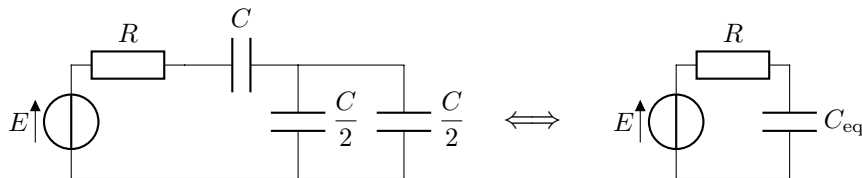
.....



Entraînement 5.6 — Simplifions !



On considère le montage suivant, constitué de plusieurs condensateurs, d'un générateur et d'un conducteur ohmique. On souhaite remplacer les condensateurs par un dipôle équivalent.



Déterminer C_{eq}

Conditions initiales et régime stationnaire

On utilisera dans cette partie les notations suivantes pour une grandeur donnée x :

$$\bullet \quad x(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} x(t)$$

$$\bullet \quad x(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t)$$

$$\bullet \quad x(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t).$$

Entraînement 5.7 — Condensateurs et bobines en régime stationnaire.



En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps.

a) Dans ce cas, un condensateur se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

(b) une source de tension

(c) un interrupteur ouvert

.....

b) Quant à la bobine, elle se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

(b) une source de courant

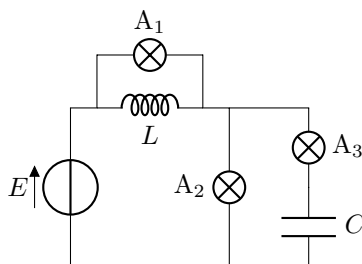
(c) un interrupteur ouvert

.....

Entraînement 5.8 — Éclairage en régime permanent.



On considère le circuit constitué de lampes (symbolisées par $\text{---}\otimes\text{---}$) que l'on peut assimiler à des résistances qui brillent quand elles sont parcourues par un courant électrique.



Le régime permanent étant établi, la ou les ampoules qui brillent sont :

(a) l'ampoule A_1

(b) l'ampoule A_2

(c) l'ampoule A_3

.....

Entraînement 5.9 — Relations de continuité.



Dans ce QCM, plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

a) Aux bornes de quel(s) dipôle(s) la tension est-elle toujours continue ?

(a) une résistance

(c) un condensateur

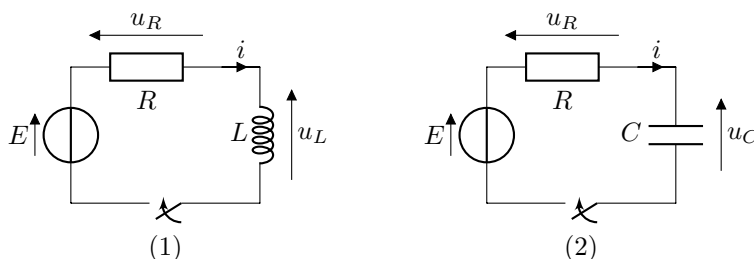
(b) une bobine

(d) un interrupteur fermé

.....

On considère les deux circuits (1) et (2) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

On suppose de plus que le condensateur est initialement déchargé.



b) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (1) ?

(a) i

(b) u_L

(c) u_R

.....

c) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (2) ?

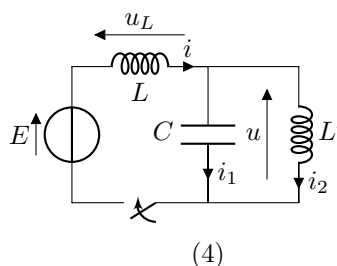
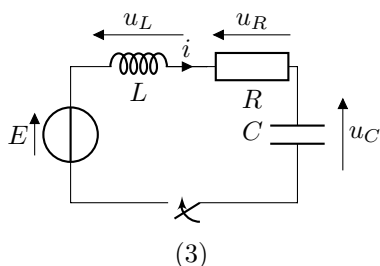
(a) i

(b) u_C

(c) u_R

.....

On considère à présent les deux circuits (3) et (4) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On suppose de plus que les condensateurs sont initialement déchargés.



d) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (3) ?

- (a) i (b) u_L (c) u_R (d) u_C

e) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (4) ?

- (a) i (b) i_1 (c) u (d) u_L

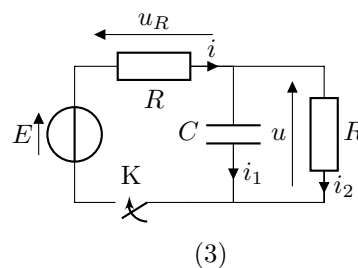
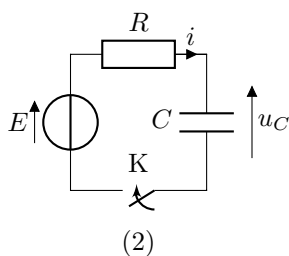
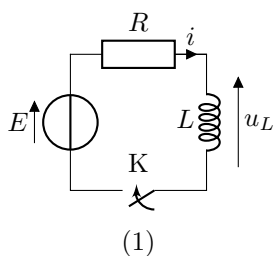
Entraînement 5.10 — Conditions initiales pour circuits du premier ordre.



On considère trois circuits constitués de générateurs de tension de fém constante E , de conducteurs de résistance R ainsi que de condensateurs de capacité C et d'une bobine d'inductance L .

L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$.

Tous les condensateurs sont initialement déchargés.



On considère dans un premier temps le circuit (1).

- a) Exprimer $i(0^+)$ b) Exprimer $u_L(0^+)$

On considère à présent le circuit (2).

- c) Exprimer $i(0^+)$

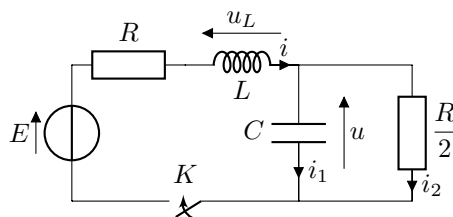
On considère finalement le circuit (3).

- d) Exprimer $u_R(0^+)$ e) En déduire $i_1(0^+)$

Entraînement 5.11 — Circuit à deux mailles.



Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de fém E constante.



Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

- a) $u(0^+)$
- b) $\frac{du}{dt}(0^+)$
- c) $i(+\infty)$
- d) $u(+\infty)$

Circuits du premier ordre

On dit qu'un circuit est *du premier ordre* quand il est régi par une équation différentielle qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t) \quad (*)$$

où τ est la constante de temps représentative de la durée du régime transitoire.

Quand l'équation différentielle est écrite comme dans (*), on dit qu'elle est *sous forme canonique*.



Entraînement 5.12 — Constantes de temps.



On donne des exemples d'équations différentielles régissant des grandeurs électriques d'un circuit.

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la constante de temps τ .

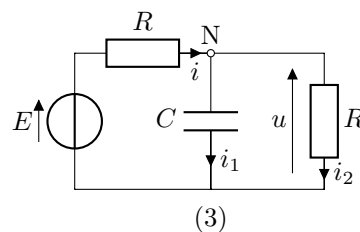
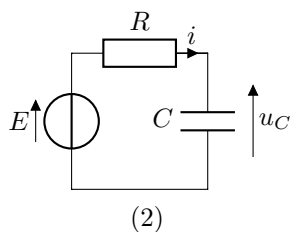
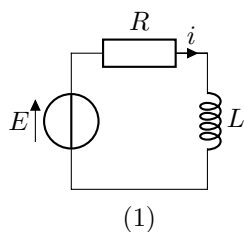
- a) $L \frac{di(t)}{dt} = E - Ri(t)$
- b) $RC \frac{du_C(t)}{dt} = E - 2u_C(t)$

Entraînement 5.13 — Des mises en équations.



On cherche à obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement d'une grandeur électrique dans chacun des circuits suivants.

Cette équation devra être donnée sous forme canonique.



On considère le circuit (1).

- a) À partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

.....

On considère maintenant le circuit (2). Déterminer :

- b) l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$

- c) l'équation différentielle pour le courant $i(t)$

On considère enfin le circuit (3) qui comporte deux mailles. En appliquant la loi des nœuds au point N, déterminer :

- d) la relation entre le courant $i(t)$, la tension $u(t)$ et $\frac{du(t)}{dt}$..

- e) En déduire l'équation différentielle pour la tension $u(t)$...



Entraînement 5.14 — Allez, on s'entraîne !



N'oubliez pas d'exprimer une solution particulière avant d'appliquer les conditions initiales !

- a) Résoudre $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$

- b) Résoudre $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = 0$ avec $i(0) = \frac{E}{R}$

- c) Résoudre $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{E}{2\tau}$ avec $u(0) = \frac{E}{2}$

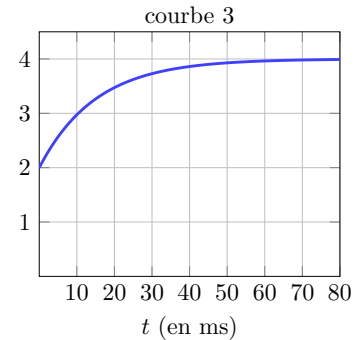
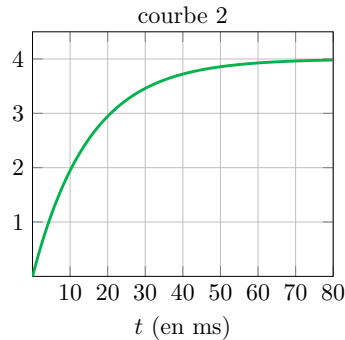
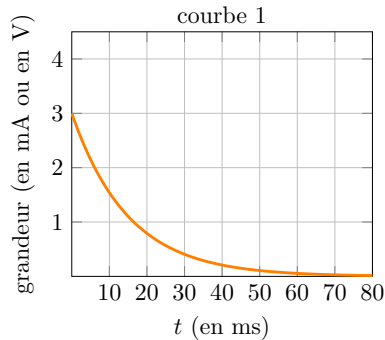


Entraînement 5.15 — Analyse de courbes.



Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois grandeurs au cours du temps :

- deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
- une intensité $i(t)$.



a) On a

$$u_1(t) = E_1(1 - e^{-t/\tau}).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a

$$u_2(t) = E_2\left(1 - \frac{e^{-t/\tau}}{2}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a

$$i(t) = \frac{E_1}{R} e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

Déterminer les valeurs numériques de :

d) E_1

e) E_2

f) R

Circuits du second ordre



Entraînement 5.16 — Équation canonique.



De nombreux circuits du second-ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

- a) ω_0 b) Q

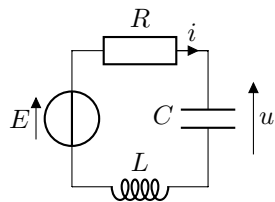
On considère l'équation $RC \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0$. Exprimer :

- c) ω_0 d) Q

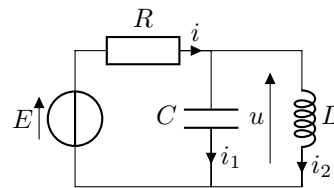
Entraînement 5.17 — Mise en équation.



On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

- a) Dans le montage 1
- b) Dans le montage 2



Entraînement 5.18 — Équations type « oscillateur harmonique ».



- a) Résoudre $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2 (u_C(t) - E) = 0$ avec $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ \frac{du_C}{dt}(0) = 0 \end{cases}$

- b) Résoudre $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$ avec $\begin{cases} i(0) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L} \end{cases}$

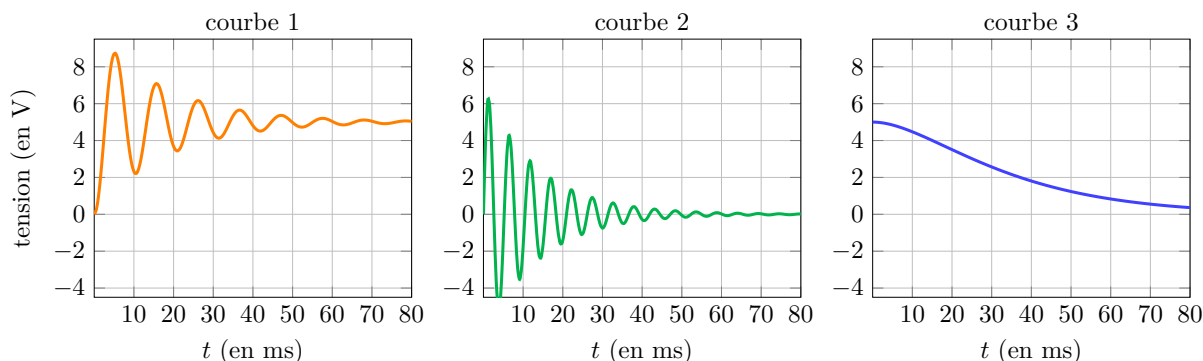
Entraînement 5.19 — Réponses d'un circuit du second-ordre.



Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps.

Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = C^{te}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a

$$u_1(t) = ae^{-t/\tau_1} - be^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a

$$u_2(t) = E \sin(\Omega t) e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

d) On a

$$u_3(t) = E \left[1 - (\cos(\Omega' t) + a \sin(\Omega' t)) e^{-t/\tau'} \right].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$

.....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l}
C + C' \quad u = L \frac{di}{dt} + L' \frac{di}{dt} \quad L \quad L + L' \quad \frac{RC}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \frac{E}{R} \quad \textcircled{a} \\
4 \text{ V} \quad E \quad \textcircled{b} \quad \textcircled{a} \text{ et } \textcircled{c} \quad \frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) i \quad \textcircled{a}, \textcircled{c} \text{ et } \textcircled{d} \\
\textcircled{c} \text{ et } \textcircled{d} \quad 1,3 \text{ k}\Omega \quad u_C(t) = \frac{1}{2} E \quad \frac{2E}{3R} \quad 4 \text{ V} \quad \textcircled{a} \quad \frac{CC'}{C + C'} \\
\textcircled{a} \quad Q \text{ est sans dimension} \quad 0 \quad \frac{1}{3} E \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \quad \textcircled{a}, \textcircled{b} \text{ et } \textcircled{c} \\
1,2 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \frac{LL'}{L + L'} \quad \frac{C}{2} \quad \textcircled{b} \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{RC} E \quad \textcircled{b} \\
\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{E}{LC} \quad 0 \quad \frac{L}{R} \quad E \quad \frac{E}{R} \quad \textcircled{b} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0 \\
\textcircled{b} \quad i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \quad \frac{E}{L\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad 0 \quad E \times (1 - \cos(\omega_0 t)) \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \\
[\omega_0] = T^{-1} \quad \frac{di}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{u}{L'} \quad u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \textcircled{c} \quad \frac{du}{dt} + \frac{2}{RC} u = \frac{E}{RC} \\
\textcircled{a} \quad \textcircled{b} \quad i = (C + C') \frac{du}{dt} \quad \textcircled{c} \quad \textcircled{c} \quad \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = 0
\end{array}$$

Étude des filtres

Prérequis

Trigonométrie. Nombres complexes. Association de dipôles. Signaux périodiques. Spectres de Fourier.

Nombres complexes et association de dipôles



Entraînement 6.1 — Un entraînement fondamental.



Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + jb$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(j\varphi) = Z_0 (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$ avec $Z_0 \geq 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b

On suppose que $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

c) Si $a \geq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in]-\pi, 0]$

(f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....

d) Si $a > 0$ et $b \leq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in]-\pi, 0]$

(f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....



Entraînement 6.2 — Impédances complexes des composants de base.



Les impédances complexes d'un résistor de résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in]-\pi, \pi]$ de chacune de ces impédances.

a) Z_0 de $\underline{Z}_R$

c) Z_0 de $\underline{Z}_L$

e) Z_0 de $\underline{Z}_C$

b) φ de $\underline{Z}_R$

d) φ de $\underline{Z}_L$

f) φ de $\underline{Z}_C$

Entraînement 6.3 — Associations de dipôles.

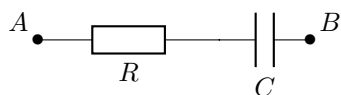


On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

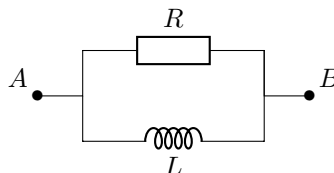
- si les dipôles sont en série : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i$
- si les dipôles sont en parallèle : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\sum_i 1/\underline{Z}_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}$ des associations de dipôles suivants :

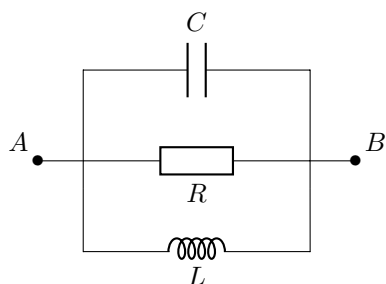
a)



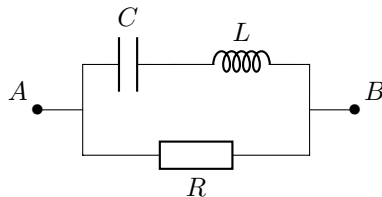
b)



c)



d)



a) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

b) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

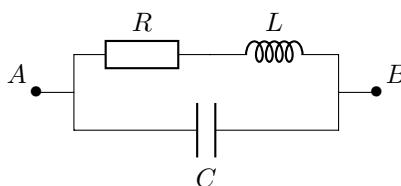
c) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

d) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

Entraînement 6.4 — À la recherche de la bonne impédance.



Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance $\underline{Z}_{AB}$ du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

(a) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

(b) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$

(c) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 - jRC\omega}$

.....

Signaux périodiques

Entraînement 6.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

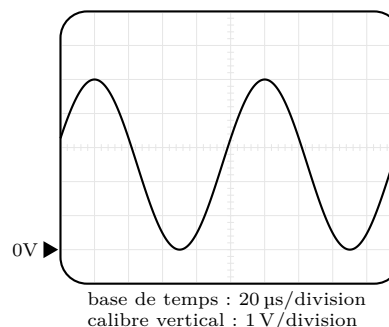


En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0 .

a) f_0

b) U_0



Entraînement 6.6 — Expression d'une tension.



Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1$ ms, d'amplitude $U_0 = 2$ V et de phase à l'origine $\varphi = 0$ rad.

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

(a) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

(c) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

(b) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

(d) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

.....



Entraînement 6.7 — Modulation d'amplitude.



On considère un signal modulé, de la forme

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi f_p t) \times \left(1 + m \cos(2\pi f_0 t)\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 < m < 1 \\ f_p > f_0. \end{cases}$$

a) On rappelle que

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \end{cases}$$

En calculant $\cos(a+b) + \cos(a-b)$, trouver une formule pour $\cos(a)\cos(b)$.

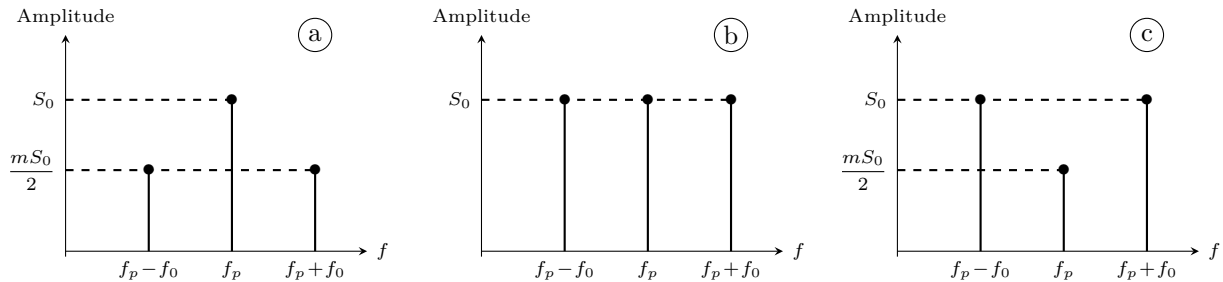
.....

b) Développer $s(t)$ et faire apparaître des sommes de cosinus.

.....

On constate que le signal $s(t)$ peut s'écrire comme la somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences spécifiques. On représente les différentes amplitudes des composantes de $s(t)$ en fonction de leur fréquence. Cette représentation est appelée spectre en amplitude de $s(t)$.

Le but de cet entraînement est de déterminer lequel des spectres ci-dessous ((a), (b) ou (c)) est celui du signal $s(t)$.



c) Donner l'amplitude de la composante de fréquence f_p de $s(t)$

d) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$..

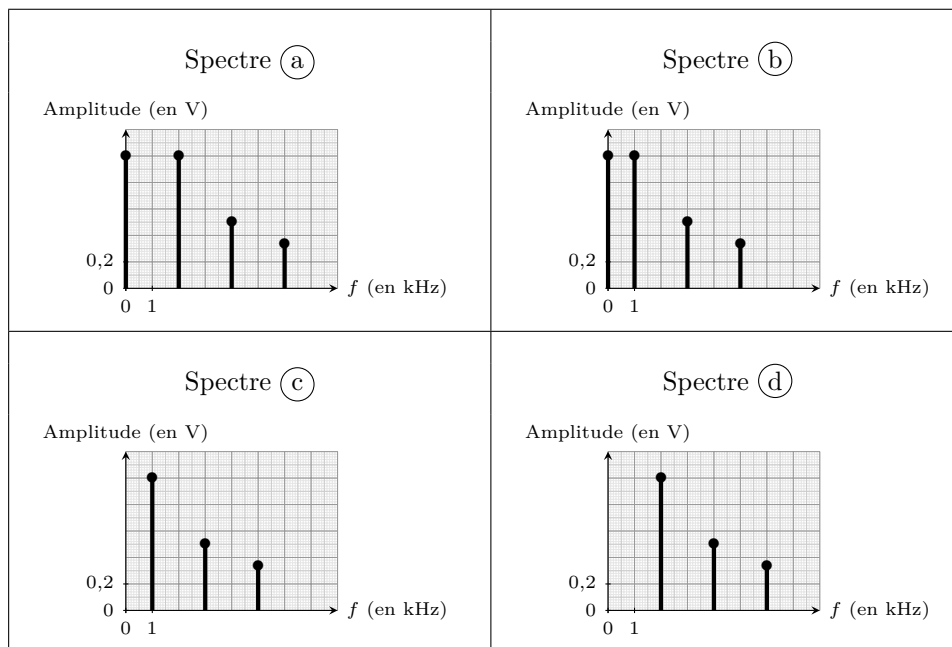
e) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$..

f) Déterminer le spectre ((a), (b) ou (c)) correspondant à $s(t)$

Entraînement 6.8 — Pêle-mêle.



Un étudiant dispose de quatre spectres en amplitude et de quatre signaux. Malheureusement, l'ensemble est mélangé. Pouvez-vous l'aider à associer le bon signal au bon spectre ((a), (b), (c) ou (d)) ?



Signal n° 1 $A_1 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(5\omega_0 t) \right)$ avec $A_1 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$	Signal n° 2 $A_2 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) \right)$ avec $A_2 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 2 \text{ kHz}$
Signal n° 3 $A_3 \left(\cos((\omega_0 - \omega_1)t) + \frac{1}{2} \cos((\omega_0 + \omega_1)t) + \frac{1}{3} \cos((\omega_0 + 3\omega_1)t) \right)$ avec $A_3 = 1 \text{ V}$, $f_0 = 3 \text{ kHz}$ et $f_1 = 1 \text{ kHz}$	Signal n° 4 $A_4 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(5\omega_0 t) \right)$ avec $A_4 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) Spectre du signal n° 1 | <input type="text"/> | c) Spectre du signal n° 3 | <input type="text"/> |
| b) Spectre du signal n° 2 | <input type="text"/> | d) Spectre du signal n° 4 | <input type="text"/> |

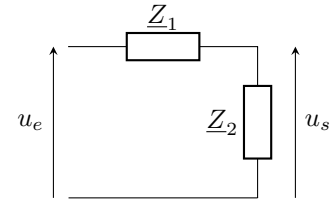
Fonctions de transfert

Entraînement 6.9 — Filtre passe-bande.



Nous disposons du filtre ci-contre, constitué de deux dipôles dont les impédances complexes sont :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \text{avec} \quad C = 47 \text{ nF} \text{ et } R = 1 \text{ k}\Omega.$$



Nous souhaitons écrire la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

a) À l'aide d'un pont diviseur de tension,

exprimer $\underline{H}(j\omega)$

c) Identifier Q

b) Identifier H_0

d) Identifier et calculer ω_0 .

Entraînement 6.10 — Filtre du second ordre.



Nous disposons d'un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On a $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ et $R = 220 \text{ }\Omega$.

Un étudiant obtient les trois égalités suivantes :

$$R\underline{i} = \underline{u}_e - \underline{u}, \quad R\underline{i}_1 = \underline{u} - \underline{u}_s \quad \text{et} \quad R\underline{i}_2 = jRC\omega\underline{u}.$$

a) À l'aide de la loi des noeuds, exprimer $\underline{i}$ en fonction de $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$

b) Utiliser la réponse précédente et les trois égalités fournies pour exprimer $\underline{u}_e$ en fonction de $\underline{u}$ et $\underline{u}_s$.

.....

L'étudiant montre grâce à un pont diviseur de tension que $\underline{u} = (1 + jRC\omega)\underline{u}_s$.

c) En déduire la fonction de transfert simplifiée $\underline{H}(j\omega)$

En comparant la réponse précédente à la forme canonique de $\underline{H}(j\omega)$ donnée, identifier

d) H_0

e) ω_0

f) Q

De la fonction de transfert au diagramme de Bode



Entraînement 6.11 — Calcul de gain en décibel.



On considère les fonctions de transfert suivantes : $\underline{H}_1 = 3,0$ et $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le gain en décibel G_{dB} d'un filtre se détermine à partir de la relation :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|).$$

Déterminer le gain en décibel associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\underline{H}_1$ | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) $\underline{H}_2$ | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) $\underline{H}_3$ | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |



Entraînement 6.12 — Calcul de phase.



On reprend les mêmes fonctions de transfert que précédemment : $\underline{H}_1 = 3,0$ et $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le déphasage φ introduit par un filtre entre les signaux d'entrée et de sortie se détermine à partir de la relation :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})}\right).$$

Déterminer le déphasage associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\underline{H}_1$ | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) $\underline{H}_2$ | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) $\underline{H}_3$ | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |



Entraînement 6.13 — Diagramme de Bode en phase.



On utilise un filtre passe-haut de fonction de transfert $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Déterminer la valeur du déphasage $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx))$ du filtre pour des signaux tels que :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre du filtre) | <input type="text"/> |
| b) $\omega \gg \omega_0$ (en hautes fréquences) | <input type="text"/> |
| c) $\omega \ll \omega_0$ (en basses fréquences) | <input type="text"/> |



Entraînement 6.14 — Calcul de gain.



Pour les fonctions de transfert suivantes, évaluer le gain $G(x) = |\underline{H}(jx)|$ pour $x = 1$.

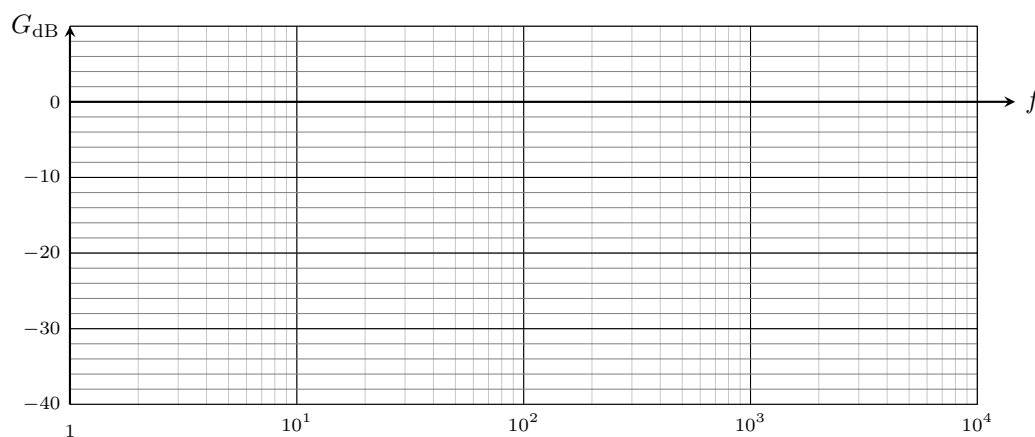
- a) $\underline{H}(jx) = \frac{1 - jx}{1 + jx}$
- b) $\underline{H}(jx) = -\frac{jx}{1 + jx}$
- c) $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + 2jmx + (jx)^2}$ avec $m = 2$

Entraînement 6.15 — Tracé sur papier semi-logarithmique.



Un élève souhaite étudier le comportement d'un filtre passe-haut en basses fréquences. Pour cela, il relève les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences bien inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

Fréquence (en Hz)	200	700	2 000
Amplitude du signal d'entrée ($U_{\text{entrée}}$ en V)	1	1	1
Amplitude du signal de sortie (U_{sortie} en V)	0,04	0,14	0,40



Le gain en décibel est donné par la relation $G_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{U_{\text{sortie}}}{U_{\text{entrée}}} \right)$.

Calculer le gain en décibel pour chacune des fréquences et placer le point correspondant sur le graphe ci-dessus.

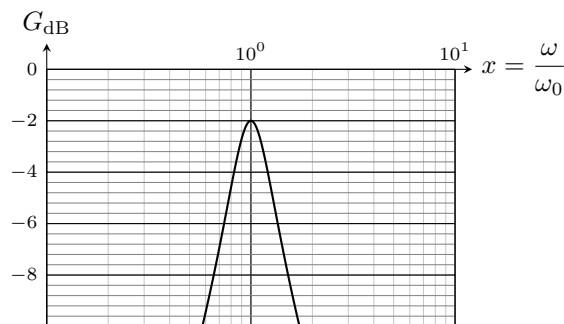
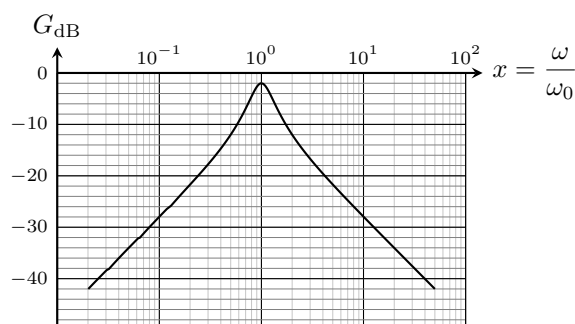
- a) Point A : $f = 200$ Hz.
- b) Point B : $f = 700$ Hz.
- c) Point C : $f = 2\,000$ Hz.
- d) Déterminer la pente de la droite passant les points A, B et C.

Entraînement 6.16 — Bande passante et facteur de qualité d'un filtre.



On dispose d'un filtre passe-bande de fréquence propre $f_0 = 15$ kHz, dont les deux fréquences de coupure à -3 dB sont f_{c1} et f_{c2} (avec $f_{c1} < f_{c2}$), et dont la fréquence de résonance est f_r .

Le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = f/f_0$ et un agrandissement sont fournis.



À partir des graphiques donnés ci-dessus, déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du filtre.

- a) f_r b) f_{c1} c) f_{c2}

Réponses mélangées

$mS_0/2$	$2,1 \times 10^4$ rad/s	b/a	$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	Ⓐ	$-28,0$ dB
$\frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{3}}$	$\underline{u}(2 + jRC\omega) - \underline{u}_s$	R	Ⓒ	Ⓓ	$19,2$ kHz
$\frac{RjL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$	$\pi/2$	0	$1/3$	$-17,1$ dB	10 kHz
$+20$ dB/décade	$-8,0$ dB	S_0	$20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$	Ⓔ
$\pi/4$	$\pi/2$	1	$20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$	$i_1 + i_2$	$\frac{RjL\omega}{R + jL\omega}$
$9,5$ dB	0	$2,5$ V	$1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$	$1/3$
Ⓐ	Ⓓ	$\frac{\pi}{2}$	0	$1/3$	$11,7$ kHz
$-\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$	$\frac{1}{RC}$	$\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	1	$1/4$	$\frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$
$\frac{R(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$	$20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$	$\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$			Ⓐ
$S_0 \cos(2\pi f_p t)$	$+\frac{mS_0}{2} \left(\cos(2\pi(f_p + f_0)t) + \cos(2\pi(f_p - f_0)t) \right)$	Ⓕ	$10 \log\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$	$\frac{1}{C\omega}$	

Énergie et puissance électriques

Prérequis

Puissance électrique. Relation puissance-énergie. Expressions des énergies stockées dans une bobine et dans un condensateur. Effet Joule.

Pour commencer



Entraînement 7.1 — Puissance et énergie.



Le chargeur d'un téléphone portable consomme une puissance de 5 W. La charge complète de la batterie (à partir d'une batterie vide) prend 55 min.

Calculer l'énergie E contenue dans la batterie :

a) en joules

b) en watt-heures ($W \cdot h$)



Entraînement 7.2 — Voiture de série contre Formule 1.



Les voitures de courses « Formule 1 » sont des véhicules hybrides : elles possèdent à la fois un moteur thermique et un moteur électrique. On souhaite comparer le moteur électrique d'une Formule 1 à celui d'une simple voiture de série.

On donne les informations suivantes :

	Hyundai Ioniq 6	Formule 1
Capacité batterie	77,4 kW · h	4 MJ
Puissance moteur	239 kW	160 cv
Consommation moyenne	15,1 kWh/100km	

On indique que $1 \text{ cv} = 0,735 \text{ kW}$.

a) Calculer l'autonomie en km de la batterie de la Hyundai Ioniq 6

b) Quel véhicule possède la batterie de plus grande capacité ?

c) Quel véhicule possède le moteur électrique le plus puissant ?



Entraînement 7.3 — Identifications de courbes.



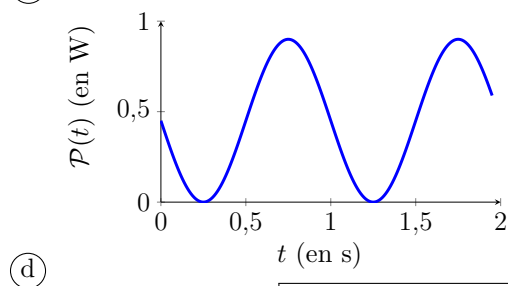
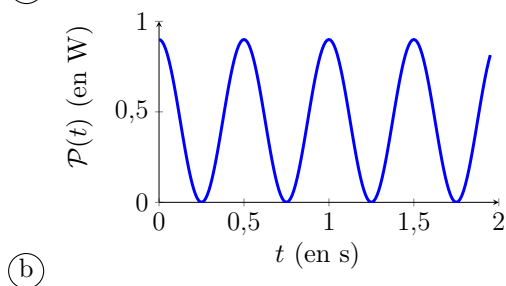
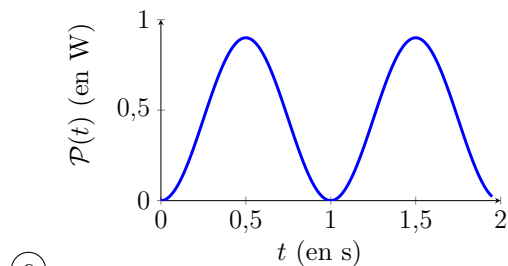
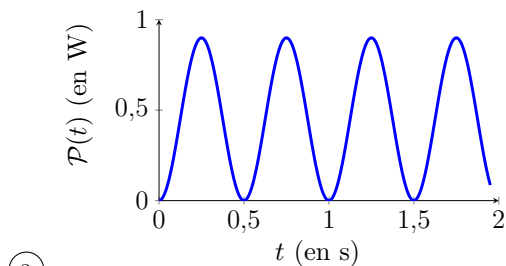
Une tension $u(t)$ est appliquée aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $R = 10\ \Omega$.

Identifier parmi les courbes proposées celle correspondant à la puissance

$$\mathcal{P}(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

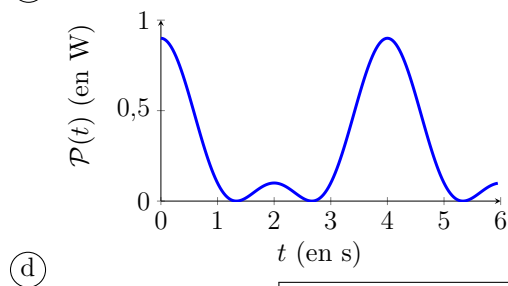
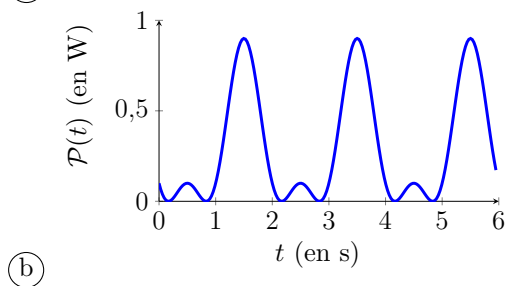
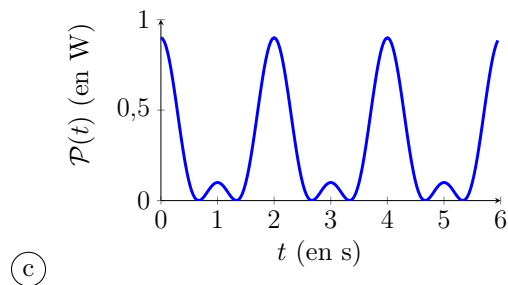
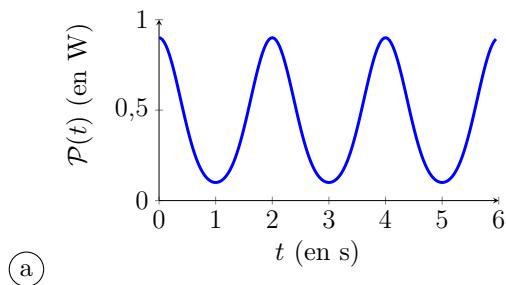
dissipée par effet Joule dans la résistance.

a) Pour $u(t) = 3 \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



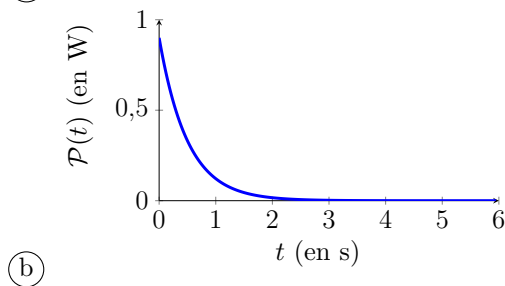
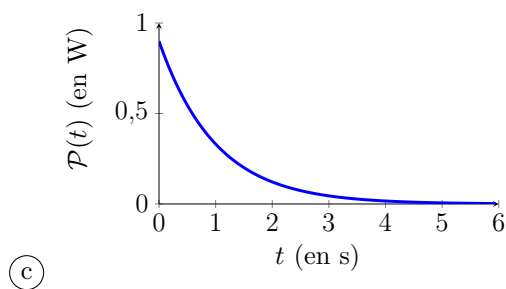
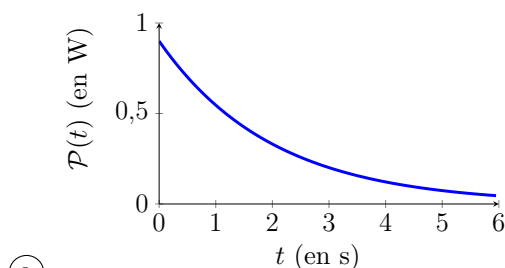
.....

b) Pour $u(t) = 1 + 2 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



.....

c) Pour $u(t) = 3 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = 2$ s.



.....



Entraînement 7.4 — Un calcul graphique.

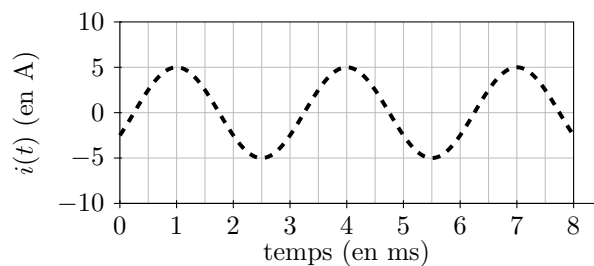
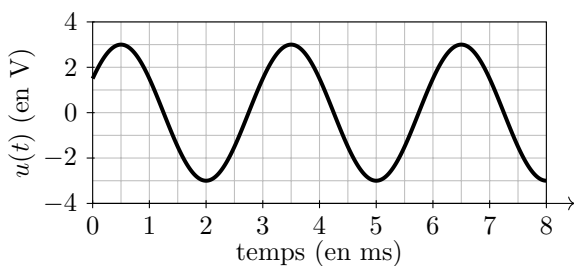


Pour un dipôle soumis à un signal alternatif harmonique, la puissance moyenne vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\varphi)$$

où U_0 et I_0 sont respectivement l'amplitude de la tension et du courant et où φ représente la valeur du déphasage angulaire entre la tension et l'intensité du courant.

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques de la tension $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$ en convention récepteur.



Déterminer la puissance moyenne reçue par ce dipôle



Entraînement 7.5 — Des calculs de puissance.



On souhaite calculer la puissance reçue par un dipôle. Quand celui-ci est alimenté par une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$, la puissance moyenne reçue est donnée par la formule :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt$$

où T est la période du signal.

Dans un premier temps, on considère les signaux $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \psi)$ et $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \psi)$.

a) Combien vaut la période T pour ces signaux ?

b) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux.

On pourra utiliser la formule $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Maintenant, on considère les signaux $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ et $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

c) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux.

On pourra utiliser la formule $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

Enfin, on considère les signaux $u(t) = u_0 \times (1 + \cos(\omega t))$ et $i(t) = i_0 \times (2 + \sin(\omega t + \psi))$.

d) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux.



Entraînement 7.6 — Calcul de puissance en RSF.



En régime sinusoïdal forcé, un générateur idéal de tension $\underline{u}$ alimente un dipôle inconnu en délivrant un courant $\underline{i}$. Dans ce cas, la puissance moyenne peut être calculée à l'aide de la formule

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u} \cdot \underline{i}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}^* \cdot \underline{i})$$

où $\underline{x}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{x}$.

Exprimer la puissance moyenne reçue par le dipôle quand :

a) $\underline{u} = U e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = j C \omega \underline{u}$

b) $\underline{i} = I e^{j\omega t + \varphi}$ et $\underline{u} = j L \omega \underline{i}$

c) $\underline{u} = \sqrt{2}(1-j)e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = 3\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{j\omega t}$

d) $\underline{u} = 4\sqrt{2}e^{j(\omega t + \pi/4)}$ et $\underline{i} = (3+5j)e^{j\omega t}$

Régime permanent

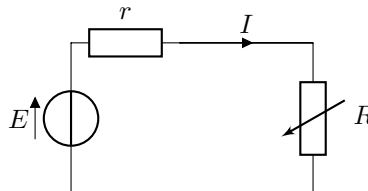


Entraînement 7.7 — Puissance consommée.



Soit un générateur réel de fém E constante et de résistance interne r .

On branche à ses bornes un conducteur ohmique de résistance variable R .



a) Déterminer l'intensité du courant qui circule dans le circuit

b) Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ dissipée dans le conducteur ohmique en fonction de E , r et R .

.....



Entraînement 7.8 — Optimisation de puissance échangée.



Dans un certain circuit, la puissance dissipée dans un conducteur ohmique de résistance R vaut

$$\mathcal{P} = E^2 \frac{R}{(r + R)^2},$$

où r est un paramètre.

On souhaite déterminer quelle valeur de R permet d'optimiser la puissance reçue par la résistance R étant données les caractéristiques de la source

a) Calculer $\frac{d\mathcal{P}}{dR}$

b) Trouver la valeur $R_{\max}$ pour laquelle $\mathcal{P}(R)$ est maximale

Ⓐ $R_{\max} = R$

Ⓑ $R_{\max} = R + r$

Ⓒ $R_{\max} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}}$

Ⓓ $R_{\max} = R \times e^{r/R}$

Ⓔ $R_{\max} = r$

Ⓕ $R_{\max} = \frac{R^2}{r + R}$

.....



Entraînement 7.9 — Un peu de calcul algébrique.



On considère une résistance R définie par

$$R = R_0 \times e^{r/R_0}.$$

Déterminer, en fonction de R_0 , la valeur du paramètre r pour que $R = 2R_0$.

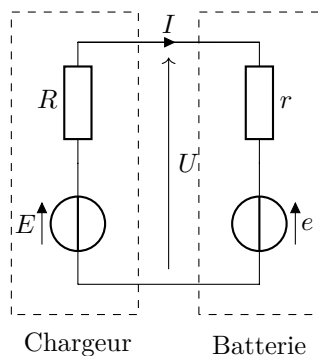
.....

Entraînement 7.10 — Charge d'une batterie.



Une batterie de voiture est déchargée. Pour recharger cette batterie, de fém $e = 12\text{ V}$ et de résistance interne $r = 0,2\ \Omega$, on la branche sur un chargeur de fém $E = 13\text{ V}$ et de résistance interne $R = 0,3\ \Omega$.

On a alors le circuit suivant :



On lit sur la batterie qu'elle a une capacité de $50\text{ A} \cdot \text{h}$ (ampères-heures).

- a) Exprimer le courant I circulant dans la batterie en fonction de E , e , R et r .

.....

- b) Exprimer la tension U aux bornes de la batterie lors de la charge en fonction de E , e , R et r .

.....

- c) Exprimer la puissance délivrée par la source de fém E en fonction de E , e , R et r .

.....

- d) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit en fonction de E , e , R et r .

.....

- e) Exprimer la puissance reçue par la batterie en fonction de E , e , R et r .

.....

Le rendement η de la charge est égal au rapport de la puissance reçue par la batterie par la puissance fournie par la source E .

- f) Déterminer l'expression du rendement η en fonction de E et e .

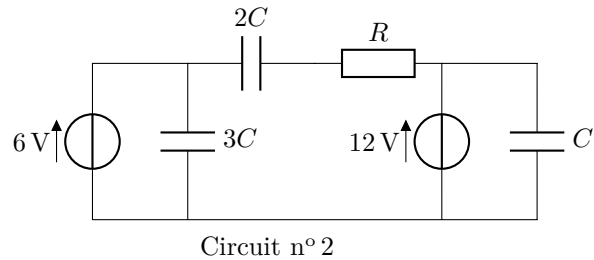
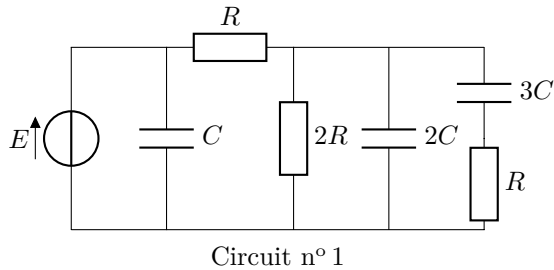
.....

- g) Calculer la valeur numérique du rendement η

Entraînement 7.11 — Énergie d'un condensateur en régime permanent.



En régime permanent, l'énergie stockée dans un condensateur de capacité C est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2$, où u est la tension à ses bornes.



a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 1.

Dans quel condensateur l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

- (a) C (b) $2C$ (c) $3C$

.....

b) Même question pour le circuit n° 2.

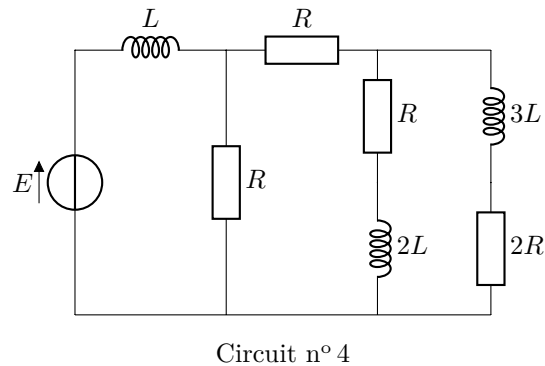
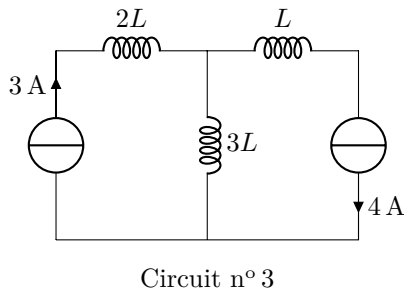
- (a) C (b) $2C$ (c) $3C$

.....

Entraînement 7.12 — Énergie d'une bobine en régime permanent.



En régime permanent, l'énergie stockée dans une bobine d'inductance L est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$ où i est le courant qui la traverse.



a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 3.

Dans quelle bobine l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

- (a) L (b) $2L$ (c) $3L$

.....

b) Même question pour le circuit n° 4.

- (a) L (b) $2L$ (c) $3L$

.....

Bilans d'énergie pour des circuits soumis à des échelons de tension

Prérequis

L'énergie $\mathcal{E}$ fournie à un dipôle entre les temps t_0 et t_1 est égale à

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(t) dt$$

où $\mathcal{P}(t)$ est la puissance instantanée fournie à ce dipôle.

Entraînement 7.13 — Charge d'un condensateur.



Soit le circuit ci-contre dans lequel le condensateur C est initialement déchargé.

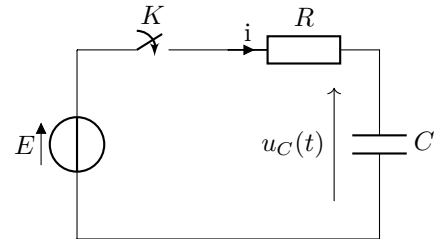
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur vaut

$$u_C(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$$

avec $\tau = RC$; l'intensité dans le circuit vaut

$$i(t) = \frac{CE}{\tau} \exp(-t/\tau).$$



Exprimer, en fonction des grandeurs introduites :

a) la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ délivrée par la source de fém E

b) la puissance instantanée $\mathcal{P}_J(t)$ dissipée par effet Joule dans le circuit.

c) la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur

d) l'énergie totale $\mathcal{E}_E$ fournie par la source de tension que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_E = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_E(t) dt.$$

.....

e) l'énergie totale $\mathcal{E}_J$ dissipée par effet Joule que l'on calculera grâce à la formule

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_J(t) dt.$$

.....

f) l'énergie totale $\mathcal{E}_C$ fournie au condensateur que l'on calculera grâce à la formule

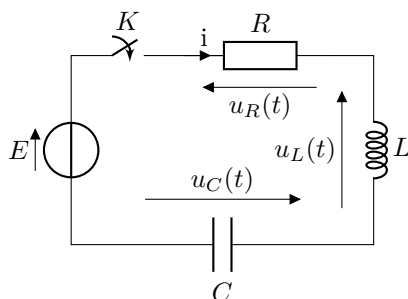
$$\mathcal{E}_C = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_C(t) dt.$$

.....

Entraînement 7.14 — Aspects énergétiques du circuit RLC.



On considère le montage ci-dessous dans lequel le condensateur est initialement déchargé.



À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

À $t = 0^+$, on a $u_C(t = 0^+) = 0$ et $i(t = 0^+) = 0$.

En régime permanent, on a $u_C(t \rightarrow +\infty) = E$ et $i(t \rightarrow +\infty) = 0$.

a) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ fournie par la source en fonction de E et de $u_C(t)$.

On pourra s'aider de la relation $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$.

.....

b) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur en fonction de $u_C(t)$ et C .

.....

c) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_L(t)$ reçue par la bobine en fonction de $i(t)$ et L .

.....

En intégrant les expressions des puissances instantanées aux bornes de chaque dipôle, exprimer en fonction des grandeurs introduites :

d) L'énergie totale fournie par la source de tension

e) L'énergie totale fournie au condensateur

f) L'énergie totale fournie à la bobine

g) En exploitant les résultats précédents, exprimer l'énergie totale dissipée par effet Joule.

.....

Bilan d'énergie en régime sinusoïdal forcé

Entraînement 7.15 — Adaptation d'impédance.

On considère un dipôle d'impédance $\underline{Z}_u$ branché aux bornes d'un générateur de fém $e_G(t)$ et d'impédance interne $\underline{Z}_G$.

On notera : $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$ et $\underline{Z}_G = R_G + jX_G$.

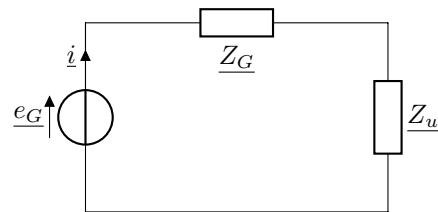
Le dipôle $\underline{Z}_u$ est traversé par le courant d'intensité $i(t)$.

On écrit en notation complexe,

$$\underline{e}_G = E\sqrt{2}e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i} = I\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

La puissance moyenne reçue par l'impédance $\underline{Z}_u$ vaut

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_u \times \underline{i} \times \underline{i}^*).$$



a) Exprimer la puissance $\mathcal{P}_m$ en fonction de I et de R_u

b) Grâce à une loi des mailles, exprimer I en fonction de E , de R_G , R_u et X_G , X_u .

.....

Des résultats précédents, on en déduit l'expression de $\mathcal{P}_m$ en fonction de E :

$$\mathcal{P}_m = \frac{R_u E^2}{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2}$$

On cherche à déterminer les conditions sur R_u et X_u pour que $\mathcal{P}_m$ soit maximale. On dit alors qu'il y a *adaptation d'impédance*.

c) Calculer la dérivée de $\mathcal{P}_m$ par rapport à X_u

d) Calculer la dérivée de $\mathcal{P}_m$ par rapport à R_u

e) Choisir parmi les quatre propositions suivantes quelle est la condition pour que $\mathcal{P}_m$ soit maximale :

(a) $X_u = -X_G$ et $R_u = -R_G$

(c) $X_u = -X_G$ et $R_u = R_G$

(b) $X_u = X_G$ et $R_u = -R_G$

(d) $X_u = X_G$ et $R_u = R_G$

.....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Hyundai Ioniq 6} & E^2 \frac{r-R}{(r+R)^3} & \textcircled{a} & \frac{E-e}{R+r} & \frac{u_0 i_0}{2} \cos(\varphi) & CE^2 & \frac{1}{2} CE^2 \\
 \frac{(E-e)^2}{R+r} & E^2 \frac{R}{(r+R)^2} & \frac{CE^2}{\tau} \left(\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau) \right) & 3,75 \text{ W} & \text{Hyundai Ioniq 6} & & \\
 CE^2 & e \frac{E-e}{R+r} & E \frac{E-e}{R+r} & \textcircled{b} & 16 \text{ W} & \frac{1}{2} CE^2 & \frac{u_0 i_0}{2} \frac{eR+Er}{R+r} \frac{1}{2} CE^2 \\
 \textcircled{a} & 0 & 92 \% & \frac{2\pi}{\omega} & \frac{E}{\sqrt{(R_G+R_u)^2 + (X_G+X_u)^2}} & \frac{d(\frac{1}{2} Li^2(t))}{dt} & \textcircled{c} \\
 \textcircled{a} & u_0 i_0 \left(2 + \frac{1}{2} \sin(\psi) \right) & \textcircled{c} & \frac{1}{2} CE^2 & -R_u E^2 \frac{2(X_G+X_u)}{\left((R_G+R_u)^2 + (X_G+X_u)^2 \right)^2} & & \\
 E^2 \frac{(R_G^2 - R_u^2) + (X_G+X_u)^2}{\left((R_G+R_u)^2 + (X_G+X_u)^2 \right)^2} & \textcircled{b} & R_u I^2 & \frac{CE^2}{\tau} \exp(-t/\tau) & & & \\
 \frac{CE^2}{\tau} \exp(-2t/\tau) & \ln(2) R_0 & EC \frac{du_C}{dt} & 0 & 513 \text{ km} & \textcircled{c} & 4,6 \text{ W} \cdot \text{h} \\
 \frac{e}{E} & \frac{E}{r+R} & \frac{d(\frac{1}{2} C u_C^2(t))}{dt} & 3 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ W} & 16,5 \text{ kJ} & 0 & \textcircled{c}
 \end{array}$$

Champ électrique

Prérequis

Projections. Coordonnées polaires. Développement limité.
Dérivation et intégration.

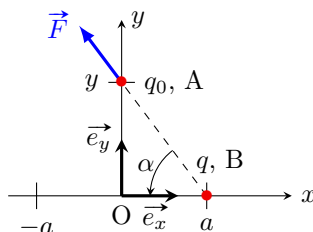
Pour commencer



Entraînement 8.1 — Projection d'une force.



Une charge électrique q située en un point $B(a, 0)$ exerce une force $\vec{F}$ sur une autre charge q_0 située au point $A(0, y)$.



a) Exprimer la distance BA en fonction de a et de y .

.....

b) Exprimer $\cos(\alpha)$ en fonction de a et y .

.....

c) Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de a et y .

.....

d) Décomposer le vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de sa norme $\|\vec{F}\|$, a et y .

.....



Entraînement 8.2 — Un combat d'interaction électrique.



On étudie une charge électrique q_0 positive. La valeur de la force F qu'exerce une autre charge q sur q_0 est telle que $F = C \frac{q}{d^2}$ où d est la distance entre les deux charges et où C est une constante.

Laquelle de ces quatre charges attire le plus fortement la charge q_0 ?

(a) $q = 2,00 \text{ C}$ et $d = 4,00 \text{ mm}$

(c) $q = -3,0 \text{ mC}$ et $d = 200 \mu\text{m}$

(b) $q = -5,0 \text{ kC}$ et $d = 0,4 \text{ m}$

(d) $q = 100 \text{ C}$ et $d = 20 \text{ cm}$

.....

Étude de charges ponctuelles



Entraînement 8.3 — Force due à deux charges.



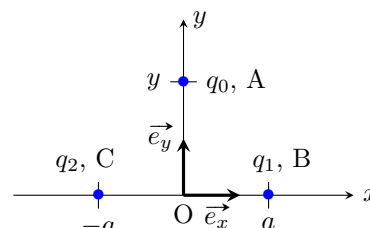
La loi de Coulomb permet d'exprimer la force $\vec{F}_{1/0}$ exercée par une charge q_1 située en un point B sur une charge q_0 située en un point A :

$$\vec{F}_{1/0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{BA^2} \vec{e}_{BA}$$

avec ϵ_0 la permittivité du vide et $\vec{e}_{BA}$ le vecteur unitaire munissant le segment BA.

On étudie les forces $\vec{F}_{1/0}$ et $\vec{F}_{2/0}$ exercées respectivement par les charges q_1 et q_2 sur la charge q_0 .

Selon les différentes valeurs des charges q_0 , q_1 et q_2 , déterminer si la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F}_{1/0} + \vec{F}_{2/0}$ est orientée selon $\vec{e}_x$, $-\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ou $-\vec{e}_y$.



a) $q_0 = q_1 = q_2$

c) $q_0 = -q_1 = q_2$

b) $-q_0 = -q_1 = q_2$

d) $-\frac{1}{2}q_0 = q_1 = q_2$



Entraînement 8.4 — Charge accélérée.



On considère une particule de charge q et de masse m se déplaçant le long d'un axe (Ox) sous l'action d'un champ de potentiel électrique $V(x)$.

On dispose de trois expressions de $V(x)$ dont une seule est homogène

$$\textcircled{a} V(x) = V_0 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \quad \textcircled{b} V(x) = V_0 \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \quad \textcircled{c} V(x) = V_0 (a^2 - x^2).$$

La vitesse $v(x)$ de la particule et le potentiel $V(x)$ en un point x sont liés par la relation

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 + qV(x) = C^{\text{te}}. \quad (3)$$

En $x = 0$ la vitesse de la particule est nulle.

a) Déterminer la seule expression de $V(x)$ homogène à un potentiel électrique

b) En utilisant la relation (3) en $x = 0$, exprimer la constante en fonction de q et V_0 ...

c) Exprimer $v(a)$ en fonction de q , m et V_0

d) Exprimer $v\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de q , m et V_0

e) Exprimer $v\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de $v(a)$

Du potentiel au champ électrique



Entraînement 8.5 — Potentiel électrique dû à deux charges.



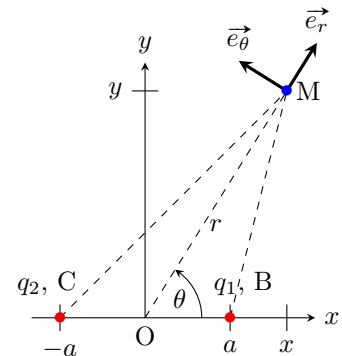
Le potentiel électrique produit en un point M par une charge q_1 située en un point B est

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{BM}.$$

Afin d'obtenir les potentiels $V_1(M)$ et $V_2(M)$ créés par les charges q_1 et q_2 telles que $q = q_1 = -q_2$, ainsi que le potentiel total

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M),$$

on cherche à exprimer les distances BM et CM en fonction des coordonnées r et θ du point M et de la distance a illustrées ci-contre.



Exprimer les grandeurs suivantes en fonction des paramètres indiqués.

a) BM en fonction de x, y, a .

On pourra utiliser les coordonnées des points B et M

b) r^2 en fonction de x, y .

On pourra chercher un triangle rectangle adéquat

c) BM en fonction de r, x, a .

On pourra utiliser les réponses des questions a) et b)

d) x en fonction de r, θ

e) BM en fonction de r, a, θ

On pourra utiliser les réponses des questions c) et d)

f) V_1 en fonction de q, r, a, θ

g) CM en fonction de x, y, a .

On pourra utiliser les coordonnées des points C et M

h) CM en fonction de r, x, a .

On pourra utiliser les réponses des questions b) et g)

i) CM en fonction de r, a, θ .

On pourra utiliser les réponses des questions d) et h)

j) V_2 en fonction de q, r, a, θ

k) V en fonction de q, r, a, θ



Entraînement 8.6 — Approximation de potentiels électriques.



Développer les expressions de potentiels électriques suivantes en calculant leur développement limité au voisinage de 0 à l'ordre indiqué et selon la variable spécifiée.

- a) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\right)^4$
- b) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos(\theta)}} \right)$...
- c) À l'ordre 2 : $V(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos(\theta)}{r^2}$
- d) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \ln\left(1 + \frac{a}{r}\right)$
- e) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4a^2}{r^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4a^2}{r^2}} - 1}\right)$



Entraînement 8.7 — Calcul d'un champ électrique.



En coordonnées polaires, le champ $\vec{E}(M)$ au point M s'exprime en fonction du potentiel $V(M)$ par la formule

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V(M)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

On donne

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C.V}^{-1}.\text{m}^{-1}, \quad q = 6,0 \cdot 10^{-11} \text{ C} \quad \text{et} \quad a = 4,0 \text{ mm}.$$

Dans cet entraînement, on suppose que $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \sin(2\theta)}{r}$.

- a) Exprimer $\vec{E}(M)$
- b) Exprimer $\vec{E}(M)$ pour $M\left(r = \frac{a}{2}, \theta = \pi\right)$
- c) À l'aide des données, calculer $\|\vec{E}(M)\|$ en V.m^{-1}



Entraînement 8.8 — *Bis repetita.*



On reprend l'entraînement précédent avec les mêmes données, mais un potentiel électrique différent.

Dans cet entraînement, on suppose que $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos(\theta)}{r^2}$.

- a) Exprimer $\vec{E}(M)$
- b) Exprimer $\vec{E}(M)$ pour $M\left(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}\right)$
- c) À l'aide des données, calculer $\|\vec{E}(M)\|$ en V.m^{-1}

Du champ au potentiel électrique



Entraînement 8.9 — Champ électrique produit par un condensateur.



Un condensateur produit un champ $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$ entre ses deux armatures positionnées en $x = 0$ et $x = d$. La différence de potentiels entre les armatures est liée au champ de telle manière que

$$V(0) - V(d) = \int_0^d E(x) dx.$$

On considère que l'armature en $x = d$ est la masse du circuit, son potentiel est donc considéré comme nul.

Exprimer le potentiel $V(0)$ pour les différentes formes de champ $E(x)$.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $E(x) = E_0\left(1 - \frac{x}{d}\right)$ | <input type="text"/> |
| b) $E(x) = E_0\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2$ | <input type="text"/> |
| c) $E(x) = E_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{2d}\right)$ | <input type="text"/> |
| d) $E(x) = E_0\left(1 - e^{-x/d}\right)$ | <input type="text"/> |

Distributions continues de charges



Entraînement 8.10 — Charge d'une sphère.



On souhaite déterminer la charge électrique totale Q contenue dans une sphère de rayon R et de densité de charges $\rho(r, \theta, \varphi)$. Pour ce faire on doit intégrer la densité de charges sur toute la sphère $\mathcal{S}$ en utilisant la formule

$$Q = \iiint_{\mathcal{S}} \rho(r, \theta, \varphi) d\tau.$$

On peut démontrer que le volume d'intégration élémentaire est $d\tau = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$ avec pour une sphère $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ainsi, on a

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho(r, \theta, \varphi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi.$$

Exprimer la charge électrique totale Q contenue dans la sphère en fonction de son rayon R pour les différentes densités de charges suivantes.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\rho_0$ | <input type="text"/> |
| b) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \rho_0$ | <input type="text"/> |
| c) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rho_0$ | <input type="text"/> |



Entraînement 8.11 — Charge d'un cylindre.



On souhaite déterminer la charge électrique totale Q contenue dans un cylindre de rayon R , de hauteur h et de densité de charges $\rho(r, \theta, z)$. Pour ce faire on doit intégrer la densité de charges sur tout le cylindre $\mathcal{C}$.

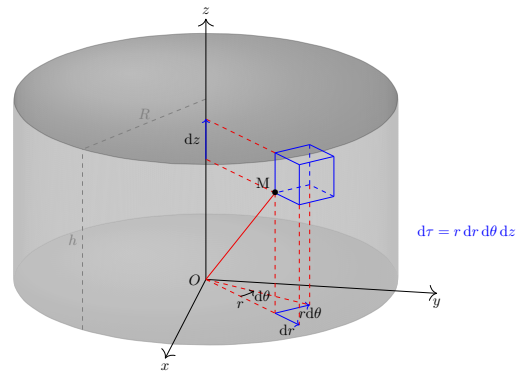
Comme on peut le voir sur la figure ci-contre, le volume d'intégration élémentaire est

$$d\tau = r \, dr \, d\theta \, dz$$

avec pour un cylindre $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in [0, h]$.

Ainsi, on a

$$Q = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r, \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz.$$



Exprimer la charge électrique totale Q contenue dans le cylindre en fonction de son rayon R et de sa hauteur h pour les différentes densités de charges suivantes.

- | | |
|--|--|
| a) $\rho(r, \theta, z) = 3$ | <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 380px;"></div> |
| b) $\rho(r, \theta, z) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^3$ | <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 380px;"></div> |
| c) $\rho(r, \theta, z) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ | <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 380px;"></div> |

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 3\pi R^2 h & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \vec{e}_\theta & \frac{1}{2} E_0 d & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos(\theta) + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2ar \cos(\theta) + a^2}} \right) & & & \\
 \textcircled{b} & \sqrt{r^2 - 2ar \cos(\theta) + a^2} & x^2 + y^2 & \frac{8}{5} \pi R^3 \rho_0 & \sqrt{r^2 + 2ax + a^2} & & \\
 -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + 2ar \cos(\theta) + a^2}} & \textcircled{c} & \frac{8}{15} R^2 h & \sqrt{(x+a)^2 + y^2} & \frac{16}{5} R^3 \rho_0 & & \\
 \frac{\|\vec{F}\|}{\sqrt{a^2 + y^2}} (-a\vec{e}_x + y\vec{e}_y) & \sqrt{\frac{2qV_0}{m}} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos(\theta)}{r^2} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 - \frac{2a}{r} \right) & & & \\
 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) & -\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \vec{e}_\theta & r \cos(\theta) & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^2} & \frac{4}{5} \pi R^2 h & \sqrt{r^2 - 2ax + a^2} & \\
 qV_0 & \sqrt{r^2 + 2ar \cos(\theta) + a^2} & \sqrt{\frac{qV_0}{2m}} & \sqrt{(x-a)^2 + y^2} & \frac{8}{3} \pi R^3 \rho_0 & & \\
 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^3} (2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta) & 3,4 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) & \sqrt{a^2 + y^2} & & & \\
 \frac{2}{3\pi} E_0 d & 2,7 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} & \frac{v(a)}{2} & E_0 d e^{-1} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} & -\vec{e}_y & -\vec{e}_x & \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \\
 \vec{e}_x & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos(\theta) + a^2}} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (\sin(2\theta) \vec{e}_r - 2 \cos(2\theta) \vec{e}_\theta) & \frac{1}{3} E_0 d & \vec{e}_y & &
 \end{array}$$

Particule dans un champ électromagnétique

Prérequis

Principe fondamental de la dynamique. Théorème de l'énergie cinétique, de l'énergie mécanique. Puissance, travail. Énergie potentielle. Force de Lorentz.

Constantes utiles

→ charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

→ célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Préliminaires

Entraînement 9.1 — Électron-volt.



Le produit d'une charge électrique par une tension est une énergie.

En multipliant la charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ par une tension de 1 V, on obtient une unité adaptée à la physique des particules, l'électron-volt, noté eV. On a $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

a) Que vaut 1 J en eV?

b) L'énergie d'un photon rouge est de $2,48 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Convertir en eV.

c) L'énergie d'un photon violet est de 3,1 eV.

Convertir en J.

d) Quel photon a la plus grande énergie?

Le rouge ou le violet?

Entraînement 9.2 — Qui est le plus massique ?



On considère les trois particules suivantes :

- le proton, dont la masse vaut $m_{\text{proton}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$;
- le kaon, qui est une particule dont l'énergie de masse vaut $m_{\text{kaon}} \times c^2 = 7,90 \times 10^{-4} \text{ erg}$;
- le tau, qui est une particule de masse $m_{\text{tau}} = 1\,777 \text{ MeV}/c^2$.

On donne $1 \text{ erg} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ et $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Laquelle de ces particules est la plus massique?

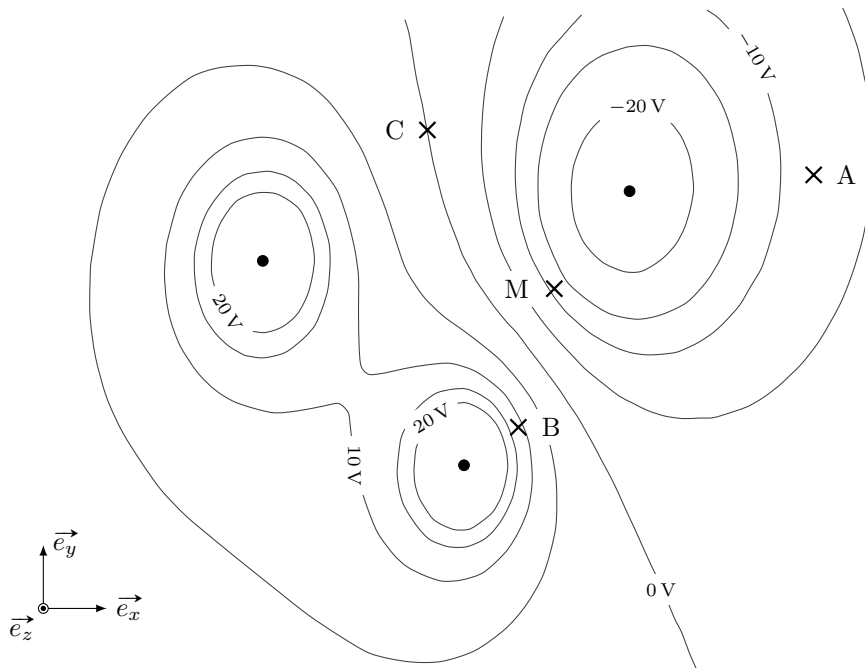
Champ électrique et potentiel scalaire

Entraînement 9.3 — Carte d'équipotentielles.



On représente ci-dessous la carte des équipotentiels créées par trois charges électriques.

Une équipotentielle correspond à l'ensemble des lieux où le potentiel électrostatique scalaire V prend une même valeur numérique.



a) En norme, le champ électrique est le plus intense :

(a) en A

(b) en B

(c) en C

.....

b) En M, le champ électrique est orienté :

(a) vers en haut à droite

(c) vers en bas à droite

(b) vers en haut à gauche

(d) vers en bas à gauche

.....

Entraînement 9.4 — Potentiel scalaire.



Le potentiel électrostatique scalaire V vérifie

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$$

où $d\vec{\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

On rappelle les expressions du vecteur $d\vec{\ell}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \\ &= dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z. \end{aligned}$$

En déterminant dV , puis intégrant, exprimer le potentiel $V(M)$ pour les champs $\vec{E}$ suivants :

- | | |
|--|--|
| a) $\vec{E}(M) = E\vec{e}_x$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/> | c) $\vec{E}(M) = \frac{\beta}{r}\vec{e}_r$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/> |
| b) $\vec{E}(M) = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/> | d) $\vec{E}(M) = \gamma(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/> |

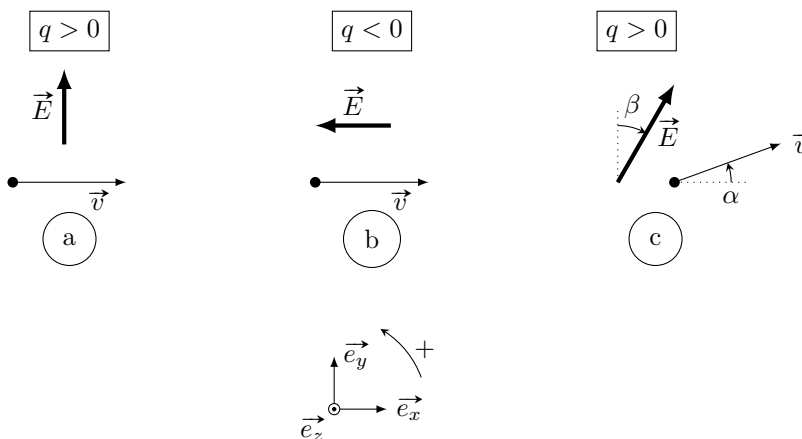
Force de Lorentz

On rappelle l'expression de la force de Lorentz $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

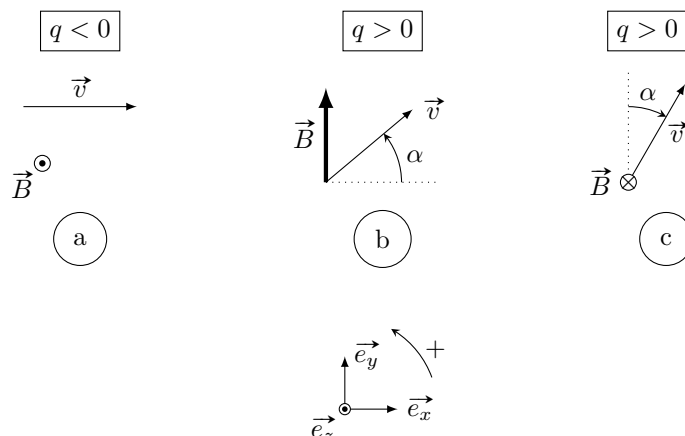
Entraînement 9.5 — Composante électrique de la force de Lorentz.



Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer (en fonction de q , de E et éventuellement de α et β) la composante électrique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{électrique}} = q\vec{E}$.



- | | |
|--|--|
| a) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} =$ | <input style="width: 200px; height: 30px;" type="text"/> |
| b) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} =$ | <input style="width: 200px; height: 30px;" type="text"/> |
| c) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} =$ | <input style="width: 200px; height: 30px;" type="text"/> |



Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer (en fonction de q , de v , de B , et éventuellement de α) la composante magnétique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

a) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \dots$

c) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \dots$

b) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \dots$

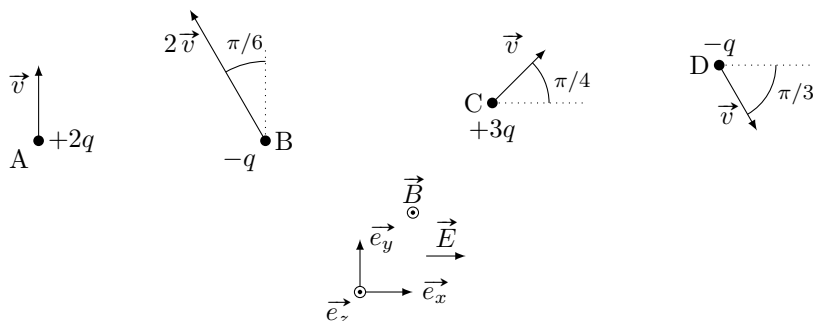


Entraînement 9.7 — Puissance de la force de Lorentz.



On se place dans une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et on considère :

- un champ électrique constant dans tout l'espace : $\vec{E} = E\vec{e}_x$;
- un champ magnétique constant dans tout l'espace : $\vec{B} = B\vec{e}_z$.



On rappelle que la puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée à une particule de vitesse $\vec{v}$ est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Donner l'expression de la puissance des forces subies par chacune des particules A, B, C et D.

a) $\mathcal{P}_A = \dots\dots\dots$

c) $\mathcal{P}_C = \dots\dots\dots$

b) $\mathcal{P}_B = \dots\dots\dots$

d) $\mathcal{P}_D = \dots\dots\dots$

Mouvement dans un champ électrique

Entraînement 9.8 — Champ perpendiculaire à la vitesse initiale.

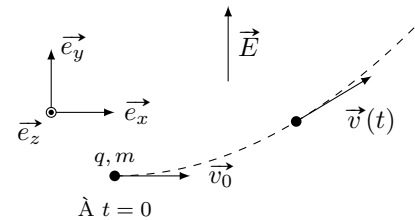


On étudie le mouvement d'une particule de charge $q > 0$ et de masse m dans une zone où règne un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_y$.

À l'instant initial, la vitesse est orthogonale au champ électrique : $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$.

L'étude du mouvement permet d'établir l'expression de la vitesse en fonction du temps :

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{e}_x + \frac{qE}{m}t\vec{e}_y.$$



a) À quel instant t_0 la particule double sa vitesse (par rapport à la vitesse initiale) ?

b) À quel instant t_1 l'énergie cinétique de la particule a quadruplé ?

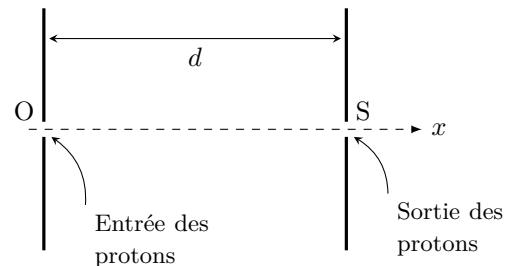
c) Quelle est la valeur de l'angle $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{v})$ à l'instant t_1 ?

Entraînement 9.9 — Champ colinéaire à la vitesse initiale.



Une proton de masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg entre en O, avec une vitesse initiale négligeable, dans un condensateur plan.

Une tension U est appliquée entre les deux armatures séparées d'une distance $d = 5,0$ cm. Le champ électrique $\vec{E}$ entre les plaques est supposé uniforme et orienté dans le sens des x croissants. Sa norme est $E = \frac{U}{d}$.



La variation d'énergie cinétique entre l'entrée O et la sortie S vérifie :

$$\mathcal{E}_c(S) - \mathcal{E}_c(O) = qU.$$

Le champ électrique de claquage de l'air vaut $E_{\max} = 3 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

a) Quelle est la tension maximale $U_{\max}$ qui peut être appliquée aux bornes du condensateur sans qu'il n'y ait de claquage ?

b) L'énergie cinétique du proton en sortie du condensateur est alors égale à :

(a) 6 keV

(b) 1,5 MeV

(c) 0,24 pJ

(d) 9,6 mJ

(plusieurs réponses sont possibles)

.....

En associant l'un après l'autre de tels condensateurs plans, on peut augmenter l'énergie cinétique des protons : l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c,n}$ à la sortie du condensateur n vérifie la relation :

$$\mathcal{E}_{c,n} - \mathcal{E}_{c,n-1} = qU.$$

c) La suite $(\mathcal{E}_{c,n})_n$ est une suite :

(a) arithmétique

(b) géométrique

(c) arithmético-géométrique

.....

d) En déduire l'expression de $\mathcal{E}_{c,n}$ en fonction de n , q et U

On souhaite atteindre une vitesse $v = \frac{c}{10}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide par une mise en série de condensateurs.

e) Quel est le nombre de condensateurs plans nécessaires pour atteindre une telle vitesse avec une tension

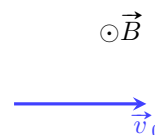
$U = 1$ MV aux bornes de chaque condensateur ?

Particule dans un champ magnétique

Entraînement 9.10 — Étude d'une trajectoire.



On considère une particule de masse m et de charge $q < 0$ placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On note $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse et $\vec{v}_0$ sa valeur initiale.



On représente la situation par le schéma ci-contre :

a) Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de q , m , $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

On pourra négliger le poids de la particule.

On admet que le mouvement est circulaire de rayon R et de centre C.

b) Exprimer la vitesse dans le repère de coordonnées polaires d'origine C.

c) En déduire l'expression de la force de Lorentz en coordonnées polaires

d) Exprimer l'accélération en coordonnées polaires

e) Reprendre le PFD pour exprimer le rayon R

f) Calculer la période T du mouvement circulaire

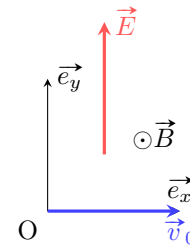
Particule dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

Entraînement 9.11 — Mouvement uniforme.



Un électron de masse m et de charge $q < 0$ adopte un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ dans une zone où règnent un champ électrique $\vec{E} = E \vec{e}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

On représente la situation par le schéma ci-contre :



a) Exprimer la force de Lorentz $\vec{F}_L$ dans la base cartésienne.

b) À quelle condition l'électron adopte-t-il un mouvement rectiligne uniforme?

Réponses mélangées

$ qE \vec{e}_x$	$-\beta \ln(r) + C$	tau	$qE(\cos(\beta)\vec{e}_y - \sin(\beta)\vec{e}_x)$	0	$qE\vec{e}_y$	(a)	$\sqrt{3}\frac{mv_0}{qE}$
$-qvB(\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y)$	$ q vB\vec{e}_y$	violet	$-\gamma xy + C$	$R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$	$v_0 = \frac{E}{B}$		
nqU	$qvB \cos(\alpha)\vec{e}_z$	qEv	(b)	(b) et (c)	$-\frac{qEv}{2}$	(a)	$R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
$6,3 \times 10^{18} \text{ eV}$	$\frac{\alpha}{r} + C$	$qRB\dot{\theta}\vec{e}_r$	$2\pi \frac{m}{ q B}$	$\sqrt{3}\frac{mv_0}{qE}$	$\frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}qEv$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{mv_0}{ q B}$	1,55 eV	$-Ex + C$	$5,0 \times 10^{-19} \text{ J}$	1,5 MV	$q(E - v_0 B)\vec{e}_y$	5	

Champ magnétique

Prérequis

La force magnétique agissant sur une charge q , de vitesse $\vec{v}$, placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ vaut $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, où $\vec{B}$ est un vecteur axial (ou pseudo-vecteur) dont l'unité est le tesla (noté T).

Constantes utiles

→ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$

Pour commencer

Entraînement 10.1 — À propos de la force magnétique.



La force magnétique agissant sur une charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ est $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

A-t-on toujours $\vec{F}_{\text{mag}} \perp \vec{v}$?

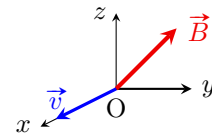
A-t-on toujours $\vec{F}_{\text{mag}} \perp \vec{B}$?



Entraînement 10.2 — Force magnétique connaissant le champ magnétique.



Un électron de charge $-e$ possède un vecteur vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ lorsqu'il est en O. Il subit alors l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$.



La force exercée sur l'électron en O vaut :

(a) $\vec{F} = ev_0B_0(-\vec{e}_y - \vec{e}_z)$

(c) $\vec{F} = ev_0B_0(-\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

(b) $\vec{F} = ev_0B_0(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

(d) $\vec{F} = ev_0B_0(\vec{e}_y - \vec{e}_z)$

.....

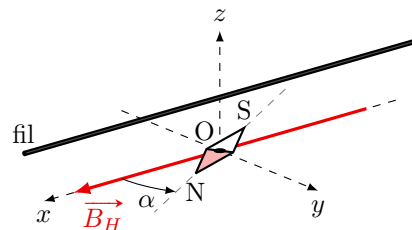
Entraînement 10.3 — Équilibre d'une boussole.



Une aiguille aimantée de centre O est libre de tourner sans frottements autour d'un axe vertical (Oz). Elle s'oriente à l'équilibre suivant $\vec{B}_H = B_H\vec{e}_x$.

Un fil conducteur de grande longueur devant la taille de l'aiguille et placé à la distance $d = 2 \text{ cm}$ au dessus de O, parallèlement à l'axe (Ox). Le champ magnétique créé en O par le fil vaut

$$\vec{B}_{\text{fil}}(\text{O}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{e}_y.$$



Lorsqu'un courant d'intensité $I = 1,2 \text{ A}$, circule dans ce fil dans le sens des x croissants, la boussole retrouve une position d'équilibre en tournant d'un angle $\alpha = 30^\circ$ comme indiqué sur la figure.

a) Exprimer B_H en fonction de μ_0 , I , d et α

b) Donner la valeur numérique de B_H

Calculs de flux magnétiques

Le flux Φ du champ magnétique à travers une surface S reposant sur un contour orienté et fermé, s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

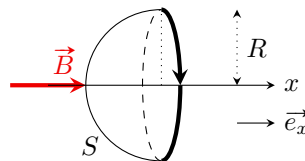
où le vecteur $d\vec{S}$ est orienté par la règle de Maxwell.

On sait par ailleurs que $\vec{B}$ est un champ vectoriel à flux conservatif : le flux de $\vec{B}$ sortant de toute surface fermée est nul.

Entraînement 10.4 — Flux d'un champ uniforme à travers une demi-sphère.



On considère la surface suivante, une demi-sphère de rayon R et d'axe (Ox) .



Combien vaut le flux du champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$ à travers cette surface ?

(a) $\phi = 0$

(b) $\phi = 2B\pi R^2$

(c) $\phi = B\pi R^2$

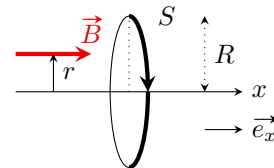
Entraînement 10.5 — Flux d'un champ non uniforme à travers un disque.



On considère un champ magnétique $\vec{B}$ défini par

$$\vec{B}(M) = B_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_x,$$

où M est repéré à l'aide des coordonnées cylindriques r , θ et x . Ainsi, r est la distance du point à l'axe (Ox) .



On souhaite calculer le flux ϕ de ce champ à travers le disque de rayon R et d'axe (Ox) orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

où $d\vec{S} = dS \vec{e}_x$ avec dS élément de surface du disque en un point M quelconque du disque.

On rappelle que l'expression de dS en coordonnées cylindriques est

$$dS = r \cdot d\theta \cdot dr.$$

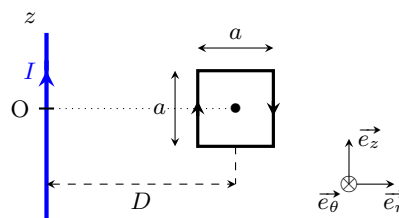
Exprimer ϕ en fonction de R et B_0

Entraînement 10.6 — Flux à travers un cadre du champ créé par un fil.



Considérons un fil rectiligne infiniment long suivant l'axe (Oz) , parcouru par un courant d'intensité I circulant dans le sens des z croissants. Le champ magnétique créé par ce fil, en un point M à la distance r de l'axe (Oz) , est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$



Nous souhaitons calculer le flux ϕ de ce champ à travers le cadre carré de côté a orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

où $d\vec{S} = dS \vec{e}_\theta$ avec $dS = dr \cdot dz$ élément de surface du cadre en un point M quelconque du cadre.

a) Exprimer ϕ en fonction de a , D , μ_0 et I

b) Donner un équivalent de ϕ si $a \ll D$

c) Que vaut ϕ si le cadre est situé dans un plan perpendiculaire à (Oz) ?

Superposition de champs



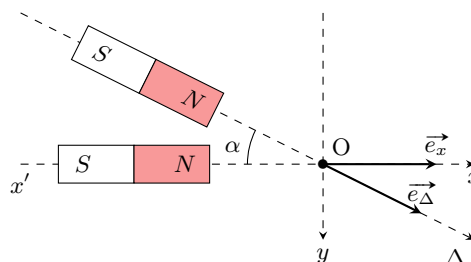
Entraînement 10.7 — Champ de deux aimants droits.



On approche le pôle Nord d'un aimant droit d'axe Δ du pôle Nord d'un aimant droit identique d'axe $(x'x)$.

On donne les champs créés par les aimants en O :

$$\vec{B}_1 = B_0 \vec{e}_x \text{ et } \vec{B}_2 = B_0 \vec{e}_\Delta \text{ avec } B_0 = 20 \text{ mT.}$$



Le champ magnétique résultant de la superposition de $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ en O sera noté $\vec{B}(O)$.

a) Exprimer $\vec{B}(O)$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, en fonction de B_0 et α

b) Exprimer la norme $B(O)$ de $\vec{B}(O)$, en fonction de B_0 et $\cos(\alpha)$

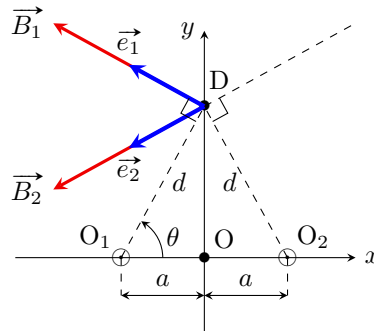
c) Calculer $B(O)$ pour $\alpha = 60^\circ$



Entraînement 10.8 — Champ magnétique créé par deux fils.



Deux fils colinéaires à l'axe (Oz) et parcourus par un courant d'intensité I coupent le plan (xOy) respectivement en O_1 et O_2 , comme représenté ci-dessous :



Ces fils passant par O_1 et par O_2 créent, au point $D(0, y)$, respectivement, les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ vérifiant

$$\vec{B}_1 = B_0 \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = B_0 \vec{e}_2.$$

On donne $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$, où d est la distance commune de D aux points O_1 et O_2 .

Le vecteur $\vec{e}_1$ est un vecteur unitaire orthogonal à la droite (O_1D) ; de même pour $\vec{e}_2$.

Le champ magnétique résultant de la superposition de $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ en D sera noté $\vec{B}_{\text{tot}}$.

a) Exprimer d en fonction de a et θ

b) Exprimer $\vec{e}_1$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer $\vec{e}_2$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

d) Exprimer $\vec{B}_{\text{tot}}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de B_0 et θ

Le champ $\vec{B}_{\text{tot}}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} f(y) \vec{e}_x.$$

e) Expliciter la fonction $f(y)$ en fonction de a et y

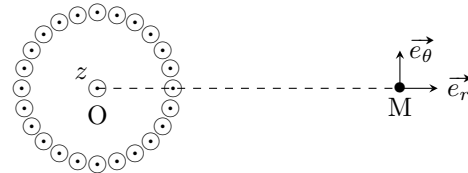
f) Pour quelles valeurs de y , $|f(y)|$ est-elle maximale ?

Champs magnétiques créés par des courants

Entraînement 10.9 — N fils sur un cylindre.



On considère N fils rectilignes ($N \gg 1$) infiniment longs, uniformément répartis sur un cylindre de centre O , de rayon a et d'axe (Oz) . Ces fils sont parcourus par le même courant circulant dans le même sens.



Soit un point M à la distance r de O .

a) Pour la distribution des courants, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan :

- ☐ (a) de symétrie
☐ (b) d'antisymétrie
☐ (c) ni de symétrie, ni d'antisymétrie

.....

b) Le champ magnétique en M est alors :

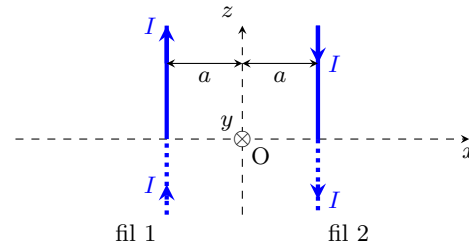
- ☐ (a) dirigé selon $\vec{e}_r$
☐ (b) dirigé selon $\vec{e}_\theta$
☐ (c) dirigé selon $\vec{e}_z$

.....

Entraînement 10.10 — Champ créé par deux fils parallèles.



On considère deux fils conducteurs infinis parallèles à l'axe (Oz) , distants de $2a$ et parcourus par des courants de même intensité I circulant en sens inverse.



a) Lequel de ces trois plans est plan de symétrie pour la distribution des courants ?

- ☐ (a) le plan (xOy)
☐ (b) le plan (yOz)
☐ (c) le plan (xOz)

.....

b) L'analyse des symétries permet de dire qu'en un point A de l'axe (Ox) , le champ $\vec{B}(A)$ est :

- ☐ (a) parallèle à (Ox)
☐ (b) parallèle à (Oy)
☐ (c) parallèle à (Oz)

.....

c) L'analyse des symétries permet de dire qu'en un point D de l'axe (Oy) , le champ $\vec{B}(D)$ est :

- ☐ (a) parallèle à (Ox)
☐ (b) parallèle à (Oy)
☐ (c) parallèle à (Oz)

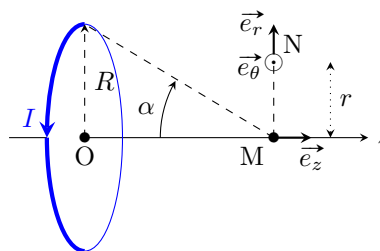
.....

Entraînement 10.11 — Champ créé par une spire circulaire.



On considère une spire circulaire de centre O, d'axe (Oz) et de rayon R , parcourue par un courant d'intensité $I > 0$ constante circulant dans le sens indiqué sur la figure.

On cherche la direction du champ $\vec{B}$ créé par la spire en un point M de l'axe (Oz), puis en N à la distance r de M.



a) En un point M de l'axe (Oz), le champ créé par la spire est

(a) colinéaire à $\vec{e}_r$

(b) colinéaire à $\vec{e}_\theta$

(c) colinéaire à $\vec{e}_z$

.....

b) L'analyse des symétries permet de dire qu'en N, le champ $\vec{B}(N)$ est contenu dans le plan :

(a) $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

(b) $(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

(c) $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$

.....



Entraînement 10.12 — Champ créé sur l'axe par une spire circulaire.



On reprend la spire circulaire de l'entraînement précédent.

Le champ magnétique créé par cette spire en $M(0, 0, z)$ s'écrit :

$$\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z,$$

où α est l'angle orienté dans le sens horaire sous lequel M voit le rayon de la spire.

Le vecteur $\vec{B}_{\text{axe}}(M)$ peut également s'écrire en fonction de z . Il prendra alors la forme suivante :

$$\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} f(z) \vec{e}_z.$$

a) Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de z et de R

b) Exprimer $f(z)$ en fonction de z et de R

On note B_1 l'intensité du champ $\vec{B}_{\text{axe}}(M)$ quand $z = R$.

c) Exprimer B_1 en fonction de μ_0 , I et R

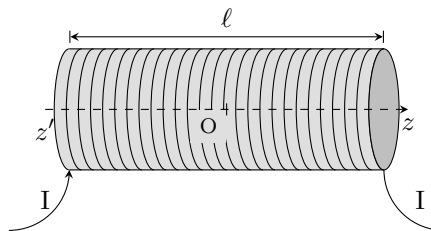
d) Pour quelle valeur de $z > 0$ a-t-on $\|\vec{B}_{\text{axe}}(M)\| = \frac{B_1}{2}$?

Entraînement 10.13 — Champ créé par un solénoïde.



On considère un solénoïde de longueur ℓ comportant n spires par unité de longueur. Les spires sont traversées par un courant d'intensité I .

Les extrémités du solénoïde sont en $z = \pm \frac{\ell}{2}$ et on note O son centre.



a) Tout plan qui contient l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie (pour la distribution des courants du solénoïde) à condition de :

(a) négliger l'hélicité de l'enroulement

(c) supposer que $\ell \rightarrow \infty$

(b) supposer que $R \ll \ell$

.....

b) En supposant la condition précédente vérifiée, l'analyse des symétries permet de dire qu'en tout point M de son axe, le champ $\vec{B}(M)$ créé par le solénoïde est :

(a) parallèle à $\vec{e}_r$

(b) parallèle à $\vec{e}_\theta$

(c) parallèle à $\vec{e}_z$

.....

Entraînement 10.14 — Expression du champ sur l'axe créé par un solénoïde.



Le champ magnétique créé par un solénoïde de longueur ℓ et de rayon R en un point M de son axe (Oz) s'écrit :

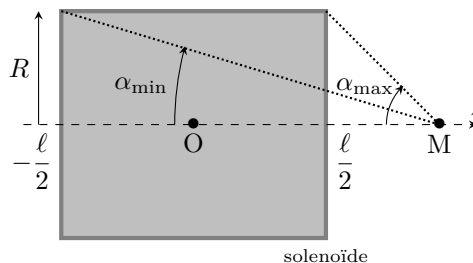
$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$$

avec

$$B(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_{\min}) - \cos(\alpha_{\max}))$$

où $\alpha_{\min}$ et $\alpha_{\max}$ sont les angles sous lesquels les extrémités du solénoïde sont vues depuis M de coordonnées $(0, 0, z)$.

On rappelle que I est l'intensité du courant qui traverse chaque spire et n le nombre de spires par unité de longueur. L'origine O de l'axe (Oz) se trouve au milieu du solénoïde.



a) Exprimer $B(M)$ en fonction de μ_0 , n , I , R , ℓ et z

b) Que vaut $B(O)$ pour ℓ quelconque?

c) Que vaut le rapport $\frac{B\left(\pm \frac{\ell}{2}\right)}{B(O)}$?

d) Vers quelle valeur tend $B(O)$ si $\frac{\ell}{R} \rightarrow +\infty$?

Champs solutions d'une équation différentielle

Entraînement 10.15 — Champ magnétique d'une plaquette supraconductrice.



En tout point M d'une plaque supraconductrice d'épaisseur $2e$, le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_y$$

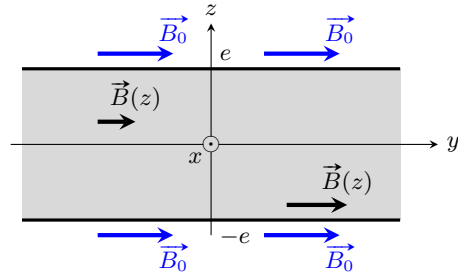
$B(z)$ est une **fonction paire** vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B(z)}{dz^2} - \frac{B(z)}{\delta^2} = 0.$$

où δ est homogène à une longueur.

Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ permet d'écrire $B(-e) = B(e) = B_0$ par continuité du champ.

La fonction cosinus hyperbolique ($\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$) pourra être utilisée.



a) Déterminer $B(z)$ en fonction de B_0 , δ , e et z

b) Calculer $\frac{B(0)}{B_0}$ pour $e = \delta/10$

c) Calculer $\frac{B(0)}{B_0}$ pour $e = 10\delta$

Entraînement 10.16 — Évolution temporelle d'un champ uniforme.



On considère un champ magnétique uniforme et dépendant du temps $B(t)\vec{e}_z$ et on suppose que la fonction $B(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dB(t)}{dt} + \omega_0^2 (B(t) - B_0) = 0 \quad (*)$$

où ω_0 , Q et B_0 sont des constantes. On suppose que $Q > 1/2$.

a) Quelle est l'équation caractéristique associée à (*) ? ...

b) Combien vaut son discriminant Δ ?

c) Quel est le signe de Δ ?

d) Donner une solution particulière de (*)

e) Résoudre l'équation différentielle (*)

Les conditions initiales du problème sont : $B(0) = 0$ et $B'(0) = 0$.

f) Déterminer complètement $B(t)$

Une analyse dimensionnelle



Entraînement 10.17 — Le magnéton de Bohr.



Le magnéton de Bohr μ_B qui est homogène à un moment magnétique, s'exprime en fonction de e (charge élémentaire), m_e (masse de l'électron) et h (constante de Planck) suivant la relation :

$$\mu_B = \frac{1}{4\pi} e^\alpha \cdot m_e^\beta \cdot h^\gamma.$$

Nous cherchons à évaluer α , β et γ par une analyse dimensionnelle. Pour cela, on utilise les deux données suivantes :

- le système international d'unités impose que le moment magnétique s'exprime en $A \cdot m^2$;
- l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence ν : $E = h\nu$.

Donner la valeur de (α, β, γ)

Réponses mélangées

(b)	$\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{D+a/2}{D-a/2}\right)$	(a)	(a)	(c)	$\frac{\mu_0 I}{2\pi d \tan(\alpha)}$	34,6 mT	(b)
$\mu_0 n I$	(d)	$-\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$	$\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2} R}$	en $y = \pm a$	B_0	oui	
$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}{\sqrt{R^2 + \ell^2}}$	$\frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{\ell}{2})^2}} - \frac{z - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{\ell}{2})^2}} \right)$	$-\sin(\theta)\vec{e}_x - \cos(\theta)\vec{e}_y$	nul				
20,8 μT	$R\sqrt{2^{5/3} - 1}$	$\frac{R^3}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$	(1, -1, 1)	$\frac{\mu_0 n I \ell}{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}$	(c)	$\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$	
$B_0(1 + \cos(\alpha))\vec{e}_x + B_0 \sin(\alpha)\vec{e}_y$	$\phi \approx \frac{\mu I a^2}{2\pi D}$	$B_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\lambda \cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) + \mu \sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) \right)$					
$\frac{\pi}{2} B_0 R^2$	$B_0 \left(1 - e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin\left(\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) \right) \right)$	$\frac{B(0)}{B_0} \approx 9 \times 10^{-5}$	(c)				
$\Delta < 0$	$\frac{a}{\cos(\theta)}$	(c)	$B_0 \sqrt{2(1 + \cos(\alpha))}$	$-2B_0 \sin(\theta)\vec{e}_x$	$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)$		
$-\frac{y}{a^2 + y^2}$	(c)	$r^2 + \frac{\omega_0 r}{Q} + \omega_0^2 = 0$	oui	(b)	$\frac{B(0)}{B_0} \approx 1$	$B_0 \frac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$	

Induction

Prérequis

Flux magnétique. Loi de Lenz. Force de Laplace.

Autour du flux d'un champ magnétique



Entraînement 11.1 — Flux propre d'un solénoïde.

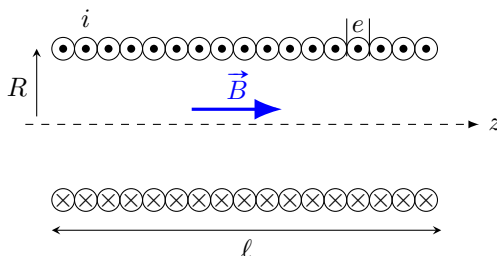


On forme une bobine en enroulant du fil de cuivre d'épaisseur e sur un cylindre de rayon R et de longueur ℓ en une seule couche de N spires jointives.

Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

où μ_0 est la perméabilité du vide, i le courant parcourant et $n = \frac{N}{\ell}$ le nombre de spires par unité de longueur.



Le flux propre dans cette bobine est $\phi_{\text{tot}} = NBS$ où S est la surface d'une spire.

Par combien est multiplié le flux propre à travers la bobine lorsque l'on double :

a) l'intensité du courant

b) la longueur du solénoïde (fil de même épaisseur)

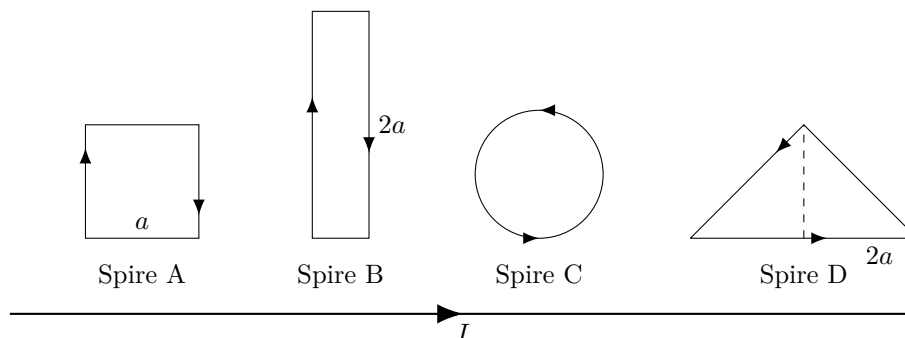
c) l'épaisseur du fil (la longueur de fil restant la même)

d) le rayon de la bobine (la longueur de fil restant la même)

Entraînement 11.2 — Flux dans des circuits orientés.



Des boucles de différentes formes mais toutes de même surface $S = a^2$ sont placées proches d'un fil infini parcouru par un courant I . On peut montrer que le champ produit par un fil infini est de la forme $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ dans le repère cylindrique (avec Oz confondu avec le fil).



a) Quels flux sont négatifs ?

- ☐ (a) ϕ_A
☐ (b) ϕ_B
☐ (c) ϕ_C
☐ (d) ϕ_D
☐ (e) Aucun

.....

b) A-t-on $|\phi_A| > |\phi_B|$?

- ☐ (a) Oui
☐ (b) Non

.....

c) A-t-on $|\phi_C| > |\phi_D|$?

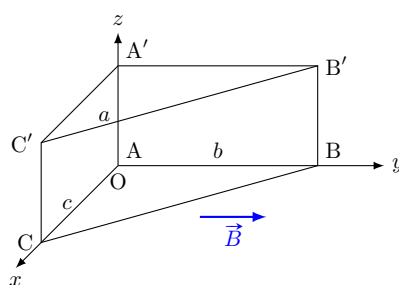
- ☐ (a) Oui
☐ (b) Non

.....

Entraînement 11.3 — Flux dans des polyèdres (1).



Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_y$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.



$$AA' = BB' = CC' = a$$

$$AB = A'B' = b$$

$$AC = A'C' = c$$

a) $\phi(\vec{B})$ pour ABC =

d) $\phi(\vec{B})$ pour A'ACC' =

b) $\phi(\vec{B})$ pour A'C'B' =

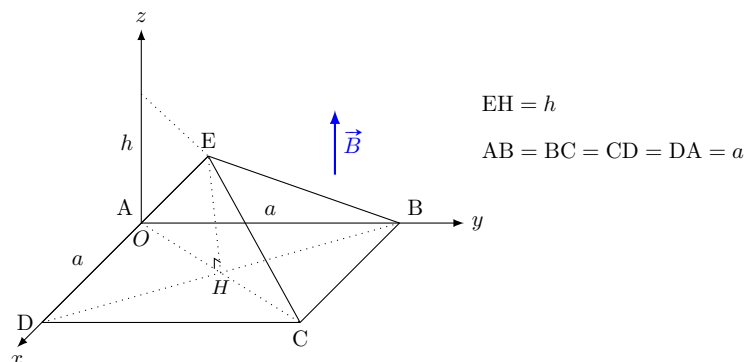
e) $\phi(\vec{B})$ pour CBB'C' =

c) $\phi(\vec{B})$ pour AA'B'B =

Entraînement 11.4 — Flux dans des polyèdres (2).



Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.

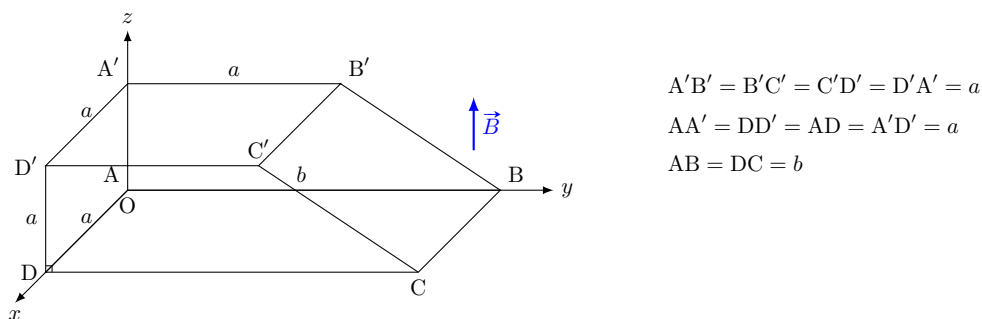


- | | | | |
|---|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $\phi(\vec{B})$ pour ABCD = | <input type="text"/> | d) $\phi(\vec{B})$ pour DCE = | <input type="text"/> |
| b) $\phi(\vec{B})_{\text{tot}}$ = | <input type="text"/> | e) $\phi(\vec{B})$ pour CBE = | <input type="text"/> |
| c) $\phi(\vec{B})$ pour ADE = | <input type="text"/> | f) $\phi(\vec{B})$ pour BAE = | <input type="text"/> |

Entraînement 11.5 — Flux dans des polyèdres (3).



Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.



- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\phi(\vec{B})$ pour ABCD = | <input type="text"/> | d) $\phi(\vec{B})$ pour ADD'A' = | <input type="text"/> |
| b) $\phi(\vec{B})$ pour BAA'B' = | <input type="text"/> | e) $\phi(\vec{B})$ pour A'D'C'B' = | <input type="text"/> |
| c) $\phi(\vec{B})$ pour CC'D'D = | <input type="text"/> | f) $\phi(\vec{B})$ pour CBB'C' = | <input type="text"/> |

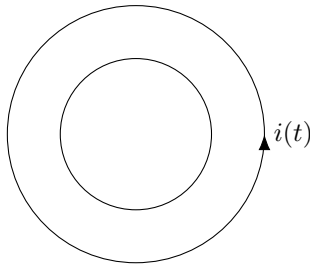
Loi de Lenz-Faraday

Entraînement 11.6 — Boucles imbriquées.



Deux boucles circulaires se trouvent dans le même plan.

Si le courant $i(t)$ dans la boucle externe est dans le sens trigonométrique et augmente avec le temps, que vaut le courant induit dans la boucle interne ?



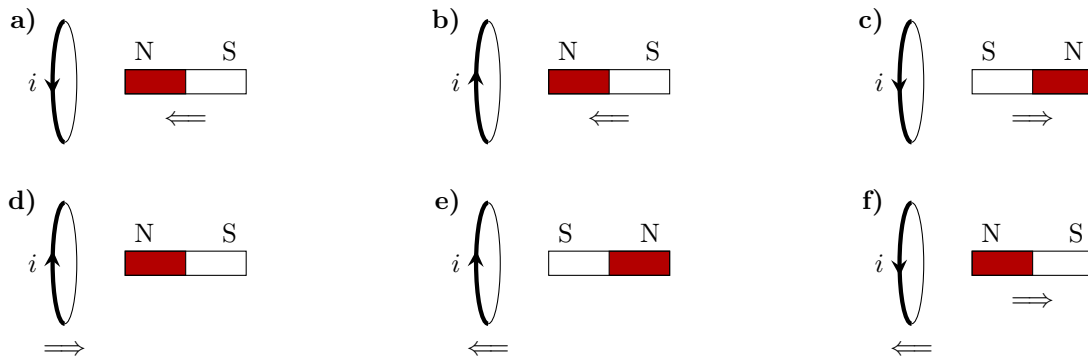
- (a) Il n'y a pas de courant induit.
- (b) Le courant induit est dans le sens des aiguilles d'une montre.
- (c) Le courant induit est antihoraire.
- (d) La direction du courant induit dépend des dimensions des boucles.

.....

Entraînement 11.7 — Signe du courant induit (1).



Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Le courant apparaissant dans la spire pendant le déplacement est noté i .



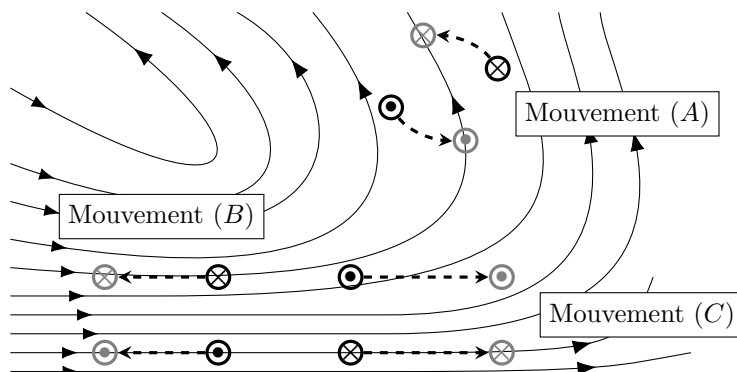
Pour chacune des situations schématisées ci-dessus, dire si on a $i > 0$ ou si on a $i < 0$.

a)	c)	e)
b)	d)	f)

Entraînement 11.8 — Signe du courant induit (2).



Des spires circulaires, orientées, perpendiculaires au plan de la figure, nommées (A), (B) et (C) sont placées dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique (voir figure ci-dessous). Pour chacune d'elles, on veut prévoir par des considérations physiques le signe du courant i lorsque les spires sont déplacées (les déplacements sont indiqués par les flèches pointillées).



Pour chaque mouvement considéré, établir si « le flux diminue », si « le flux augmente » ou si « le flux ne varie pas ».

- a) mouvement (A)
- b) mouvement (B)
- c) mouvement (C)

Pour chaque mouvement considéré, en déduire si $i > 0$, si $i < 0$ ou si $i = 0$.

- d) (A) e) (B) f) (C)



Entraînement 11.9 — Calcul de fém avec champ magnétique variable.



On plonge une spire de surface $S(t)$ dans une zone où règne un champ magnétique $B(t)$. Déterminer la force électromotrice $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ induite pour les flux suivants :

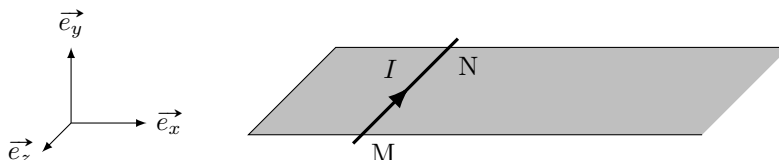
- a) $\Phi_1 = B_0 S_0 \cos(\omega t + \varphi)$
- b) $\Phi_2 = B_0 S_0 \times \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp^{-\frac{t}{\tau}}$
- c) $\Phi_3 = B_0(1 - \cos(2\omega t))S_0 \sin^2(\omega t)$
- d) $\Phi_4 = B_0 \cos(\omega t)S_0 \sin(3\omega t)$

Force de Laplace

Entraînement 11.10 — Rails de Laplace.



Une tige métallique de longueur $MN = d$, de masse m est parcourue par un courant d'intensité constante I et est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. À la position $x = 0$ la tige entre dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{e}_y$. On néglige les frottements et tout phénomène d'induction.



Exprimer :

a) La force de Laplace $\vec{F}$ qui s'exerce sur la tige en fonction de B , d et I

b) La norme $v(t)$ de la vitesse en fonction du temps

c) La distance d'arrêt D depuis la position initiale en fonction de v_0 , B , I , m et d ..

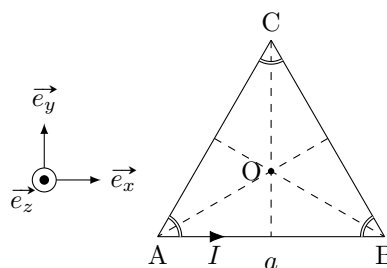
Entraînement 11.11 — Résultante des forces de Laplace.



On considère un cadre triangulaire parcouru par un courant d'intensité I . Les trois côtés du cadre ont le même longueur notée a . On plonge ce cadre dans un champ magnétique extérieur orienté suivant la direction $\vec{e}_z$: $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

On rappelle qu'un élément de longueur $d\ell$, parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ est soumis à la force élémentaire, appelée *force de Laplace* :

$$d\vec{f} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$



Exprimer les forces de Laplace sur chaque côté de ce cadre :

a) $\vec{F}_{L,AB} = \dots$

c) $\vec{F}_{L,CA} = \dots$

b) $\vec{F}_{L,BC} = \dots$

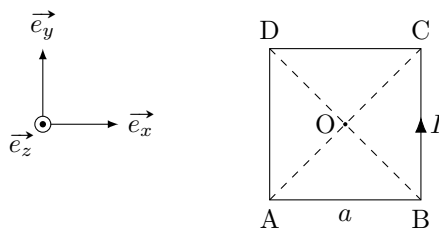
Que vaut la résultante de ces forces ?

d) $\vec{F}_{L,tot} = \dots$

Entraînement 11.12 — Couple des forces de Laplace.



On considère un cadre carré parcouru par un courant d'intensité I . On plonge ce cadre dans un champ magnétique extérieur orienté suivant la direction $\vec{e}_y$: $\vec{B} = B\vec{e}_y$.



Exprimer les forces de Laplace sur chaque côté de ce cadre :

a) $\vec{F}_{L,AB} = \dots\dots\dots$

b) $\vec{F}_{L,BC} = \dots\dots\dots$

c) $\vec{F}_{L,CD} = \dots\dots\dots$

d) $\vec{F}_{L,DA} = \dots\dots\dots$

Que vaut la résultante de ces forces ?

e) $\vec{F}_{L,tot} = \dots\dots\dots$

Calculer le moment des forces de Laplace par rapport au point O.

f) $\vec{M}_O(\vec{F}_{L,tot}) = \dots\dots\dots$

On rappelle qu'un dipôle magnétique peut se caractériser par son moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$. En présence d'un champ magnétique extérieur, le dipôle magnétique subit un couple $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Exprimer $\vec{m}$ et $\vec{\Gamma}$.

g) $\vec{m} = \dots\dots\dots$

h) $\vec{\Gamma} = \dots\dots\dots$

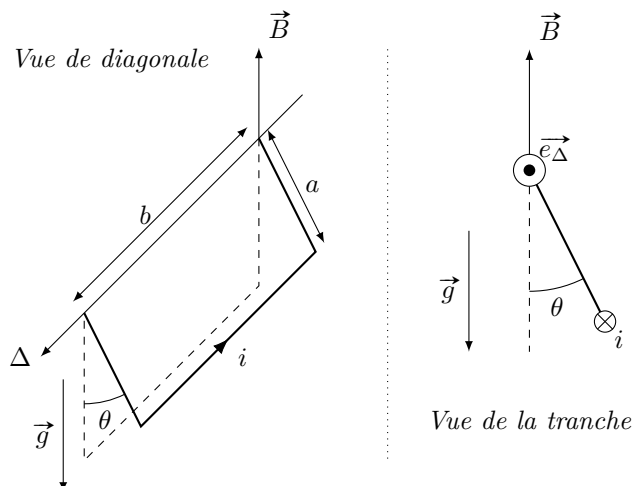
Entraînement 11.13 — Équilibre d'un cadre.



Un cadre conducteur, de forme rectangulaire, de longueur b et largeur a peut tourner sans frottement autour de l'axe Δ .

La masse totale du cadre est m .

Un dispositif, non représenté sur la figure, impose une intensité du courant i constante dans le cadre.



Exprimer :

- le moment magnétique $\vec{m}$ en fonction de a , b et i
- le couple magnétique Γ_{Δ} projeté sur l'axe Δ en fonction de a , b , i , B et θ
- le moment du poids par rapport à l'axe Δ en fonction de a , m , g , et θ
- la position d'équilibre θ_{eq} en fonction de B , m , g , b et i

Réponses mélangées

$i < 0$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$i > 0$	$\vec{0}$	$i > 0$	$i < 0$	$-B_0 S_0 \omega [2 \cos(4\omega t) + \cos(2\omega t)]$
$B_0 S_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$	$-\frac{a}{2} mg \sin \theta$	$iabB \cos \theta$	$\vec{0}$	$\frac{Ba^2}{4}$	$-Ia^2 B \vec{e}_x$	0	
$i > 0$	0	$-IaB \vec{e}_z$	$-\frac{IBd}{m} t + v_0$	$i < 0$	$-Ia^2 B \vec{e}_x$	0	$i = 0$
$\textcircled{a}$ et $\textcircled{b}$	$-Bab$	Oui	$-IBd \vec{e}_x$	$iab \vec{e}_\theta$	$-IaB \vec{e}_y$	$Ia^2 \vec{e}_z$	$Ba(b-a)$
0	$-8B_0 S_0 \omega \cos(\omega t) \sin^3(\omega t)$	$\frac{Ba^2}{4}$	$\times 2$	$\frac{Ba^2}{4}$	$i > 0$	le flux diminue	
0	Ba^2	$\frac{Ba^2}{4}$	0	$IaB \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_y \right)$	$\textcircled{b}$	$\times 1/2$	$i < 0$
$\times 2$	le flux ne varie pas	$-Ba^2$	$\arctan\left(\frac{2ibB}{mg}\right)$	0	$B_0 S_0 \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau}$		
Non	Bac	le flux diminue	$IaB \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_y \right)$	$-Bac$	$\frac{mv_0^2}{2IBd}$		